Istituto Comprensivo Rignano – Incisa Valdarno

Percorsi didattici scuola secondaria

Ma a che cosa serve il Teorema di Pitagora?

Classe IIB Scuola Secondaria di I grado A.S. 2017/2018
Classe IIC Scuola Secondaria di I grado A.S. 2016/2017
Insegnante: Lucia Ciabini

Collocazione del percorso effettuato nel curricolo verticale d'Istituto

Il percorso è stato svolto tra metà febbraio e metà aprile del secondo anno della scuola secondaria di primo grado. Prerequisiti indispensabili per affrontarlo sono la conoscenza delle proprietà dei poligoni e delle formule delle aree, oltre al significato e al calcolo della radice quadrata. La programmazione del secondo anno, nell'ambito del nucleo spazio e figure, prevede i seguenti argomenti:

- Generalità sui poligoni (completamento)
- Le isometrie (simmetria, rotazione e traslazione)
- Classificazione e proprietà dei quadrilateri
- Area di figure piane. Problemi su isoperimetria ed equiestensione
- **Il teorema di Pitagora**
- Similitudine e omotetia

Obiettivi essenziali di apprendimento

Dalle Indicazioni nazionali del 2012

SPAZIO E FIGURE:

- Conoscere il Teorema di Pitagora e le sue applicazioni in Matematica e in situazioni concrete.

NUMERI:

- Sapere che non si può trovare una frazione o un numero decimale che elevato al quadrato dà 2, o altri numeri interi.

Altri obiettivi:

- Conoscere il teorema inverso ed il significato di terna pitagorica ed utilizzarli per verificare se un angolo è retto.

- Conoscere la relazione tra lato e diagonale di un quadrato.

Elementi salienti dell'approccio metodologico

Il percorso è stato proposto a classi abituate a lavorare secondo la didattica laboratoriale in cinque fasi.

Quando possibile, i concetti sono stati costruiti dopo una fase di riflessione e verbalizzazione scritta individuale rispondendo a quesiti posti dall'insegnante; la docente ha poi moderato la discussione con la trascrizione sulla LIM degli interventi e delle ipotesi (corrette e non) degli alunni, per arrivare, dopo una discussione collettiva, alle conclusioni, alle definizioni e alle proprietà corrette.

Le conclusioni raggiunte, condivise da tutti, sono state trascritte ed evidenziate sul quaderno di ogni ragazzo.

Materiali, apparecchi e strumenti utilizzati:

a) Materiali

Listelli di carta, spago, metro da sarta

b) Strumenti

LIM per visualizzare presentazioni ppt, per proporre situazioni su cui riflettere, per le discussioni collettive e per scrivere le conclusioni condivise

Ambiente/i in cui è stato sviluppato il percorso:

Quasi tutte le attività sono state svolte in aula, con i banchi disposti in modo consueto, per le attività individuali, oppure organizzati in isole per le attività di gruppo.

La verifica delle terne pitagoriche con la corda è stata fatta nel corridoio della scuola.

Il percorso ha previsto anche un’attività al *Giardino di Archimede* a S. Bartolo a Cintoia (Firenze).

Tempo impiegato:

a) Per la messa a punto preliminare nel gruppo LSS

Il percorso, costruito in itinere dall'insegnante, non è stato discusso all'interno del gruppo di lavoro del LSS. Sono stati invece condivisi i risultati ed i materiali raccolti alla fine delle attività.

b) In classe

20 h suddivise nel seguente modo:

- 13 h di lezione e laboratorio
- 4 h verifica orale (12 alunni)
- 1,5 h verifica scritta con quesiti Invalsi e discussione (tutta la classe)
- 1,5 h verifica scritta finale (tutta la classe)

Sitografia e bibliografia

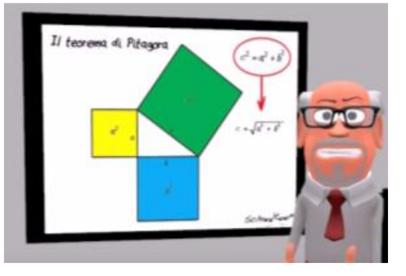
Dal dialogo del «Menone» al Teorema di Pitagora, materiali didattici per il primo ciclo dell'UMI-CIIM:
http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/primo-ciclo/

La Matematica, Figure piane B, di E. Castelnuovo, La Nuova Italia

Contaci!, Vol.2 spazio e figure, di Clara Bertinetto, Arja Metiäinen, Johannes Paasonen, Eija Voutilainen, Ed. Zanichelli

Sito di schooltoon per spunti divertenti :

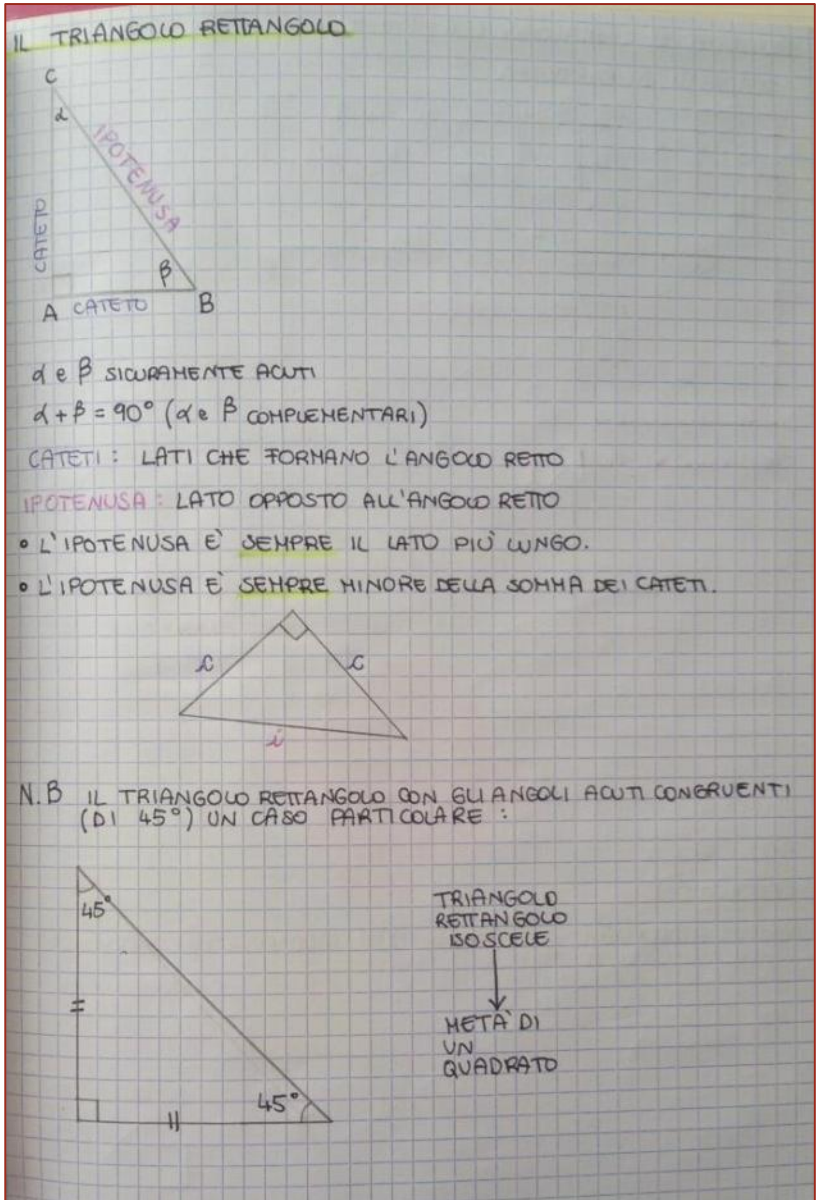
https://www.youtube.com/watch?v=cjg-fg-LvLg
https://www.youtube.com/watch?v=FpnmdBh4BvA



Sito del Giardino di Archimede:

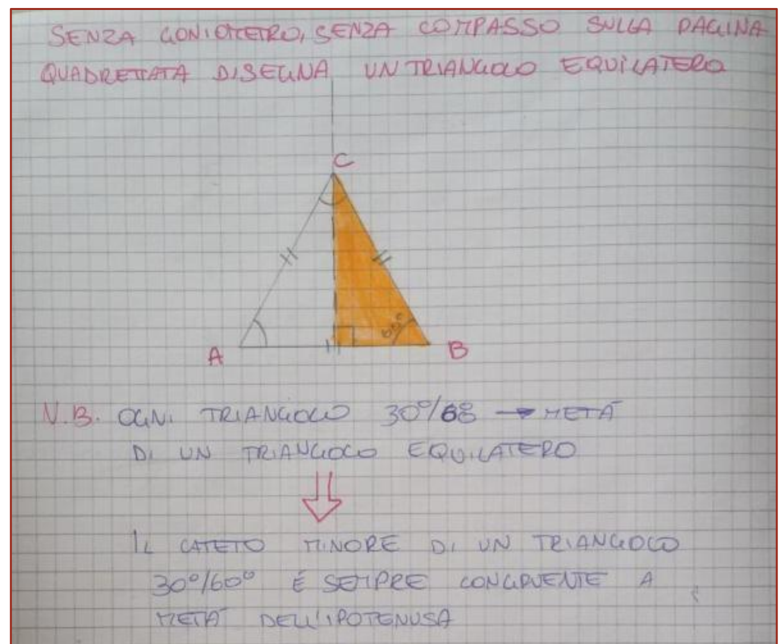
https://php.math.unifi.it/archimede/archimede/pitagora

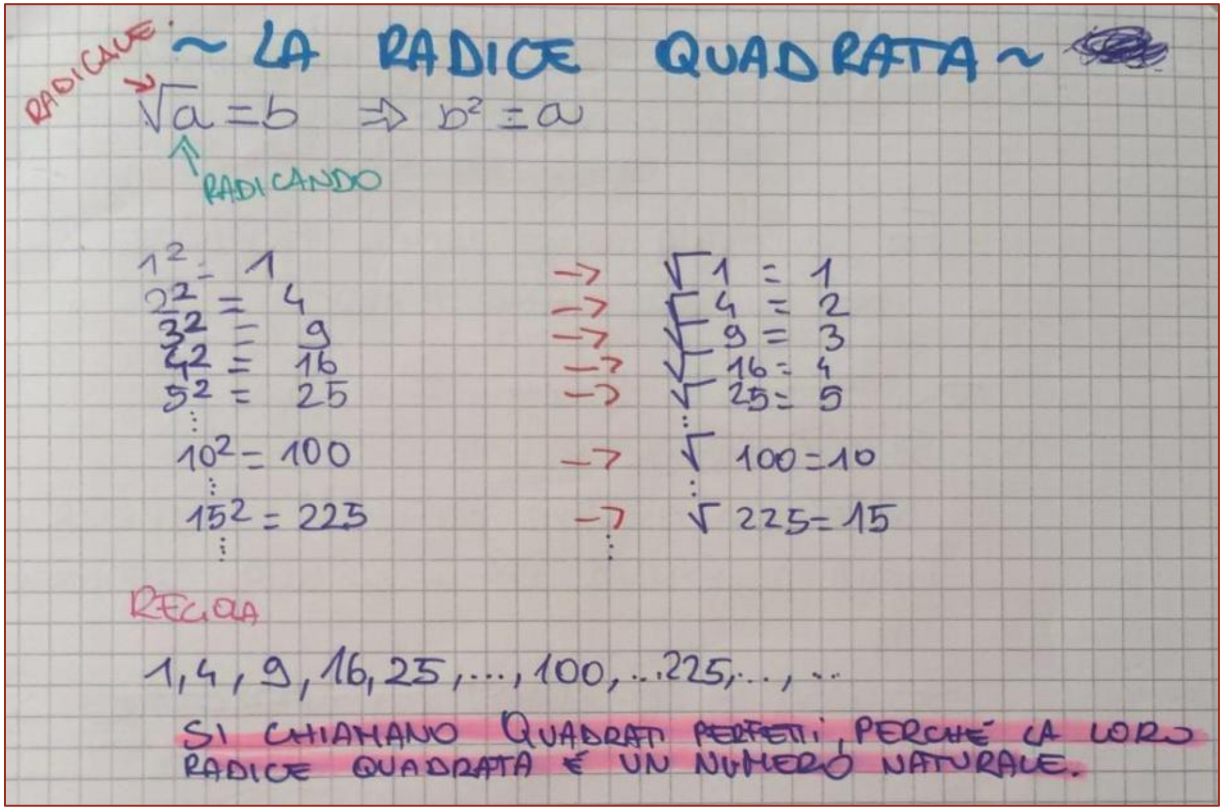
Prima di iniziare: prerequisiti indispensabili

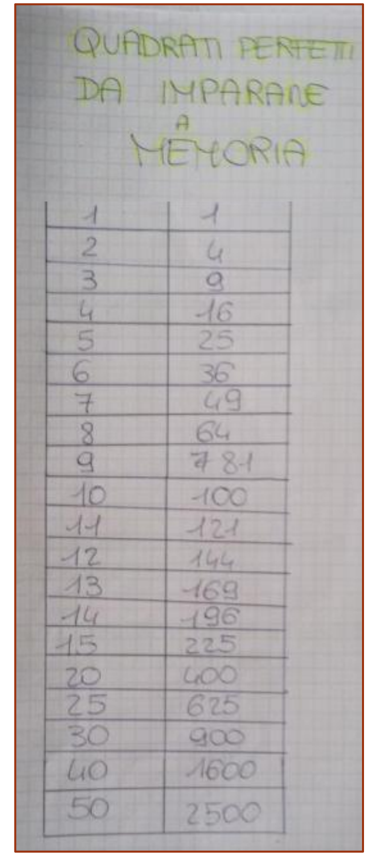


Triangoli rettangoli...

Prima di affrontare il Teorema di Pitagora e le sue applicazioni, si discutono insieme e si ripassano alcune definizioni fondamentali e le caratteristiche dei triangoli rettangoli 45°/45° e 30°/60°. I ragazzi devono saper riconoscere questi ultimi, riconducendoli facilmente al quadrato e al triangolo equilatero.







... e radice quadrata

Ovviamente, per applicare il teorema di Pitagora, è necessario che gli alunni abbiano ben capito il significato della radice quadrata (introdotta lavorando sulla formula inversa dell’area del quadrato) e che sappiano calcolarla rapidamente. Si chiede ai ragazzi di conoscere i quadrati, dei numeri più piccoli, e quindi la radice quadrata dei numeri che si usano più frequentemente.

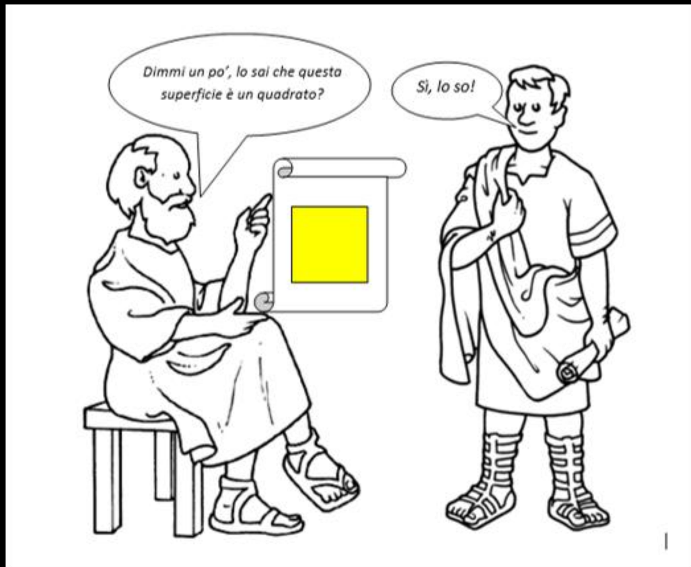
1. Introduzione

Il percorso vero e proprio inizia con una introduzione di tipo storico.
Questo ha lo scopo di suscitare l'interesse e la partecipazione della classe, ma anche di collegare la matematica alle altre discipline.

La storia della matematica dà un senso più completo a questa materia, e soprattutto consente di coinvolgere anche gli alunni che hanno difficoltà logiche e/o un maggior interesse per le discipline umanistiche.

Si parla, in questo caso, della figura degli studiosi dell'antichità, in particolare di Platone e di Socrate.
Nel «Menone» Platone illustra la maieutica socratica, cioè l'idea secondo la quale si può arrivare alla conoscenza e alla confutazione di idee sbagliate e contraddittorie attraverso una serie di domande e risposte opportunamente guidate da un maestro.
In pratica, la versione più antica della didattica laboratoriale!

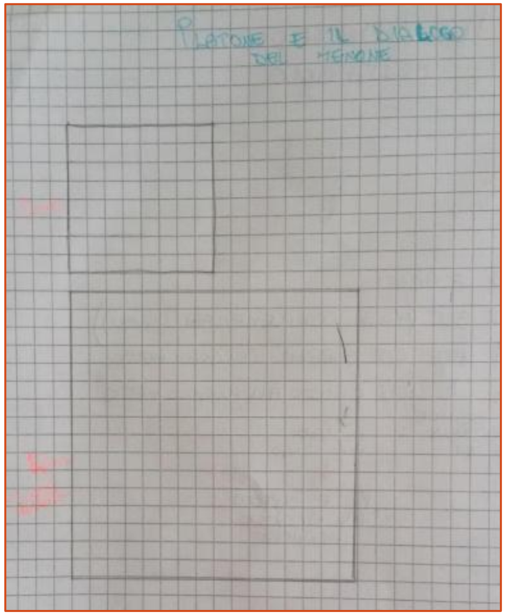
Il problema che Socrate pone allo schiavo di Menone viene rivolto alla classe:

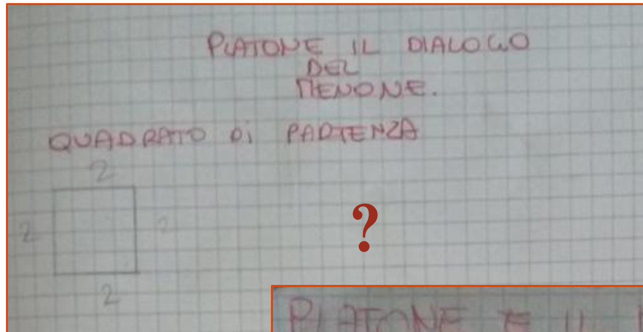


E ora tocca a voi!

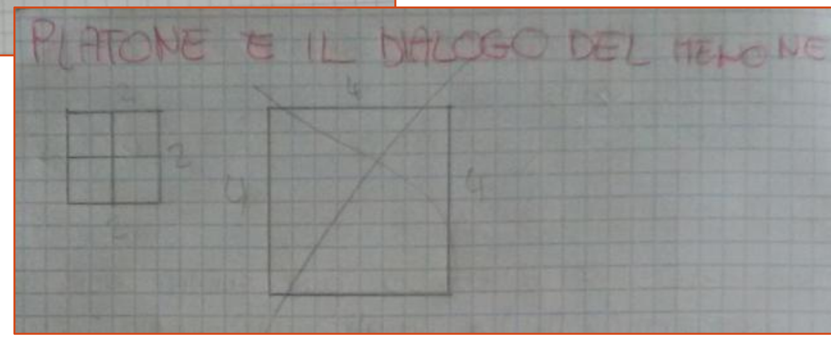
Dato un quadrato di lato = 2 unità

<u>Disegnare</u> il quadrato di area doppia

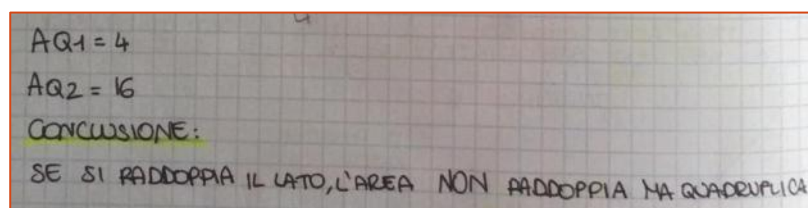




La soluzione più istintiva: raddoppiare il lato.



Molti ragazzi, nel tentativo di risolvere il problema grafico, si rendono conto che raddoppiare il lato non conduce alla soluzione. Dopo una discussione collettiva alla LIM si conclude che:



Altre proposte interessanti:

Altra soluzione, corretta ma non esatta (perché richiede un'approssimazione!)

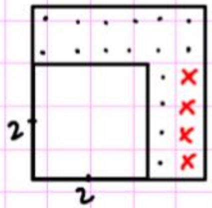
Con i calcoli

$A_{Q_1} = 2 \cdot 2 = 4$

$A_{Q_2} = 4 \cdot 2 = 8 \longrightarrow \ell = \sqrt{A_{Q_2}} = \sqrt{8} \simeq 2{,}83$

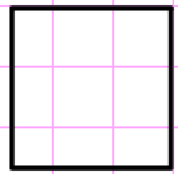
Soluzione di Sara, per tentativi

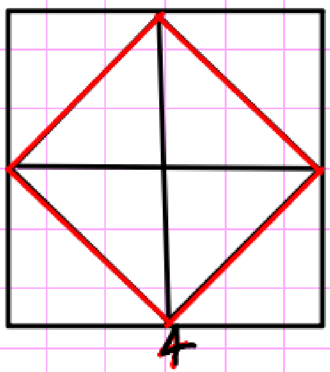
Per tentativi



- Ha contato i quadretti all'interno (16)
- Ha disposto altri 16 quadretti intorno al quadrato iniziale accorgendosi che, per completare il quadrato, le mancavano 4 quadretti.

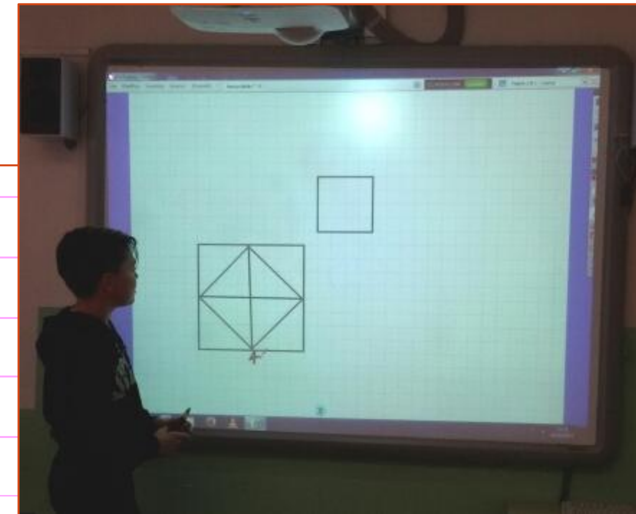
Alcuni ragazzi propongono soluzioni più vicine a quella corretta. Queste vengono apprezzate e discusse alla LIM. Le discussioni sono state molto partecipate e accese.
Soluzione analitica: si ricava la lunghezza del lato applicando la formula inversa dell'area del quadrato. Il valore è approssimato, e soprattutto si fa notare che non risponde alla richiesta «disegna il quadrato di area doppia».
Soluzione per tentativi: si cerca di ottenere il quadrato di area doppia aggiungendo un ugual numero di quadretti.





- Ha raddoppiato il lato ottenendo, come molti, il quadrato di area quadrupl
- Ha costruito il rombo che ha per vertici i punti medi dei lati raddoppiati.
- Ma il rombo è anche un quadrato!
- Calcoliamone l'area con la formula del rombo:

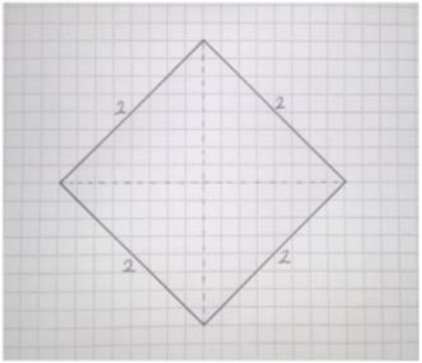
$$A=\frac{D\cdot d}{2}=\frac{4\cdot 4}{2}=8$$



La soluzione di Federico (a.s. 2016/2017)

Partendo dall'errore più comune, un alunno trova la soluzione dimezzando il quadrato di lato doppio.

3. Come sappiamo, il quadrato è un rombo particolare. Considera il quadrato di lato 2 disegnato in figura:



Riesci, così, a disegnare il quadrato di area doppia, come richiesto da Socrate? Spiega.

____

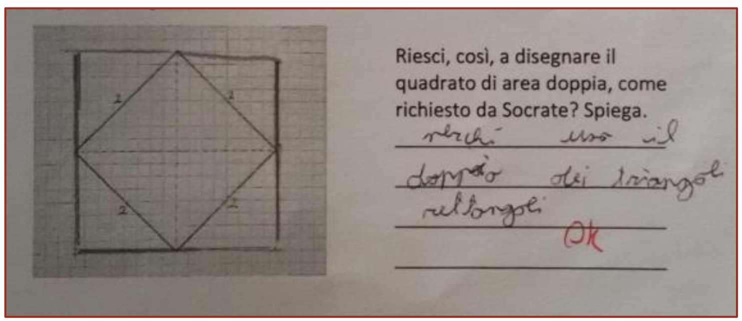
____

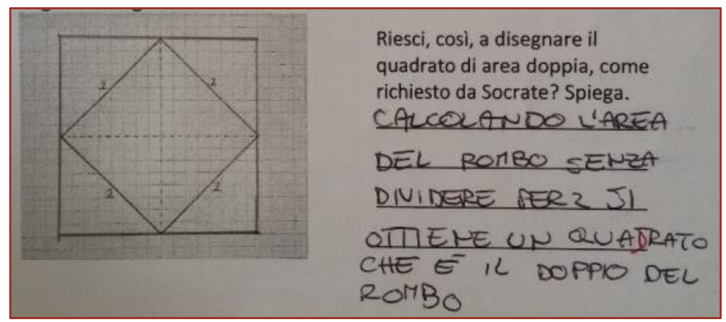
____

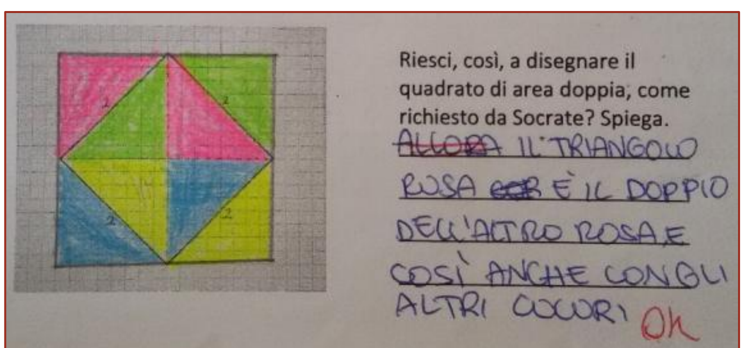
____

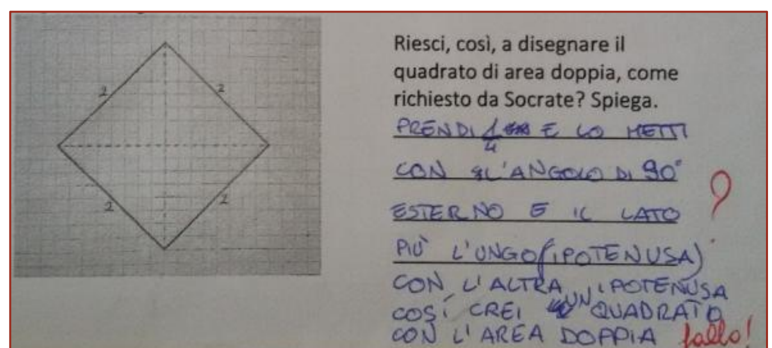
Nell'A.S. 2017/2018 nessuno riesce a trovare la soluzione grafica. L'insegnante avvia alla soluzione del problema dello schiavo di Menone, proponendo questo esercizio in un compito in classe.

Diversi alunni, infatti, risolvono senza problemi:

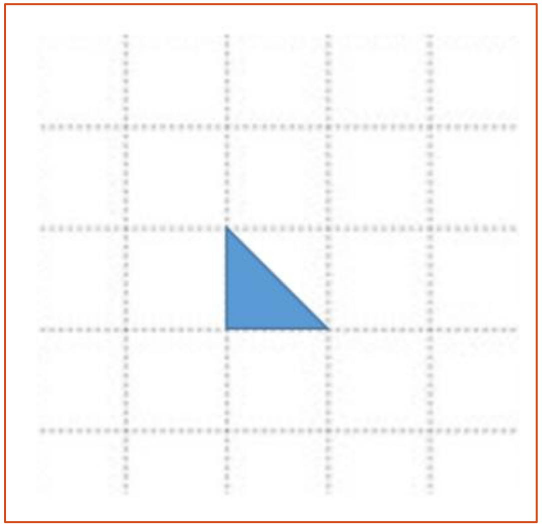








2. Ragioniamo sul triangolo rettangolo isoscele

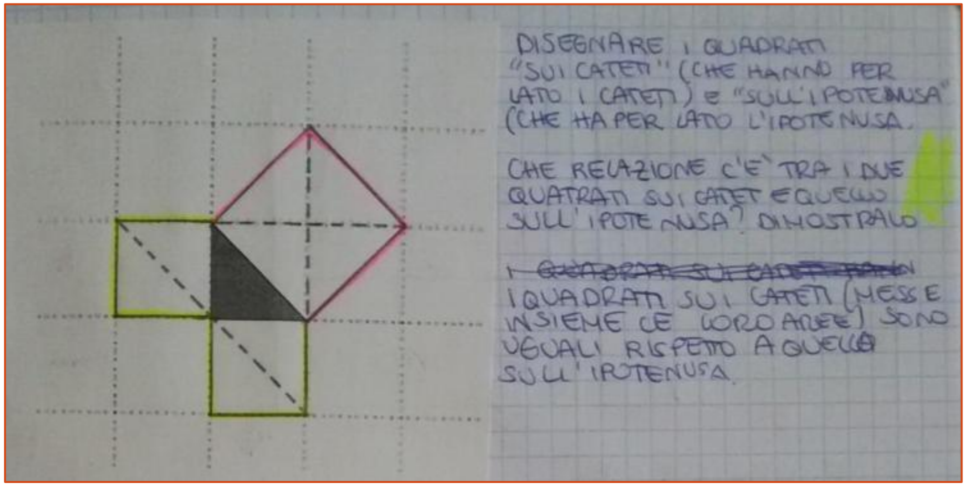


L’insegnante fornisce una figura costituita da un triangolo rettangolo isoscele disegnato su carta quadrettata. Questo è una parte del quadrato su cui si è ragionato nella fase precedente. Si chiede:

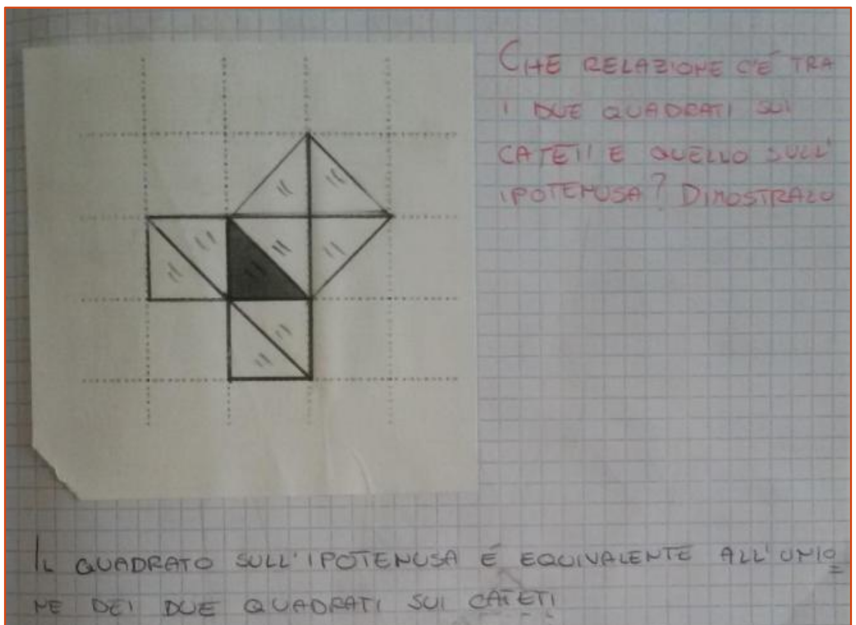
- **Disegna i quadrati «costruiti sui cateti» ed il quadrato «costruito sull’ipotenusa».**
- **Quale relazione lega i quadrati sui cateti e quello sull’ipotenusa? Dimostralo.**

Si è ritenuto importante commentare queste espressioni, che spesso vengno fatte imparare a memoria ma che, per un ragazzino che ci si confronta per la prima volta, non risultano affatto scontate. Si traduce, quindi, così:

costruito su ... = che ha per lato ...



Senza difficoltà gli alunni disegnano i quadrati richiesti e trovano la relazione che lega le loro aree. Si è scelto di fornire il disegno con la quadrettatura in modo da consentire un disegno chiaro e corretto. I ragazzi trovano, infatti, grosse difficoltà a disegnare quadrati ruotati rispetto alla quadrettatura del quaderno.

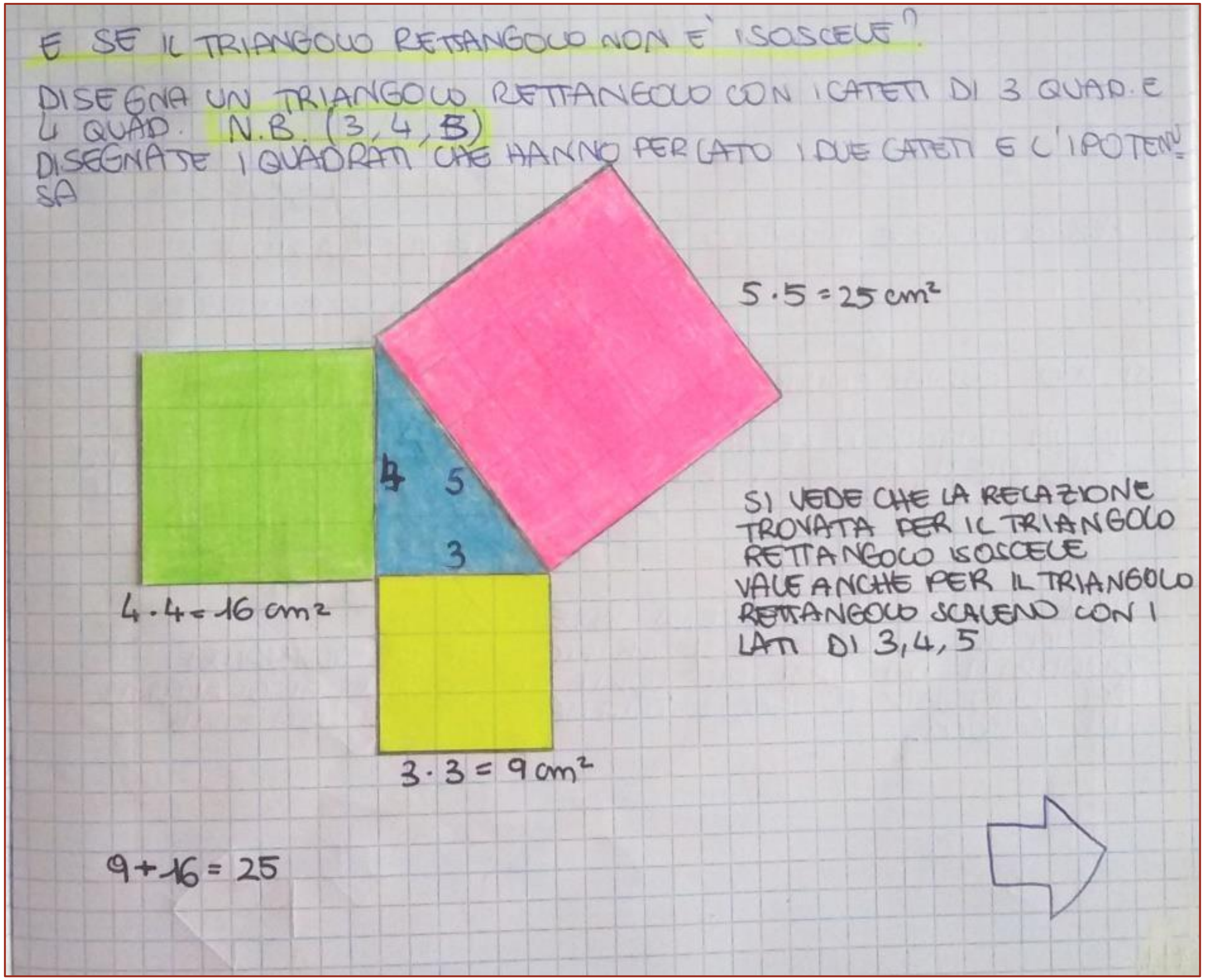


Si può concludere che:

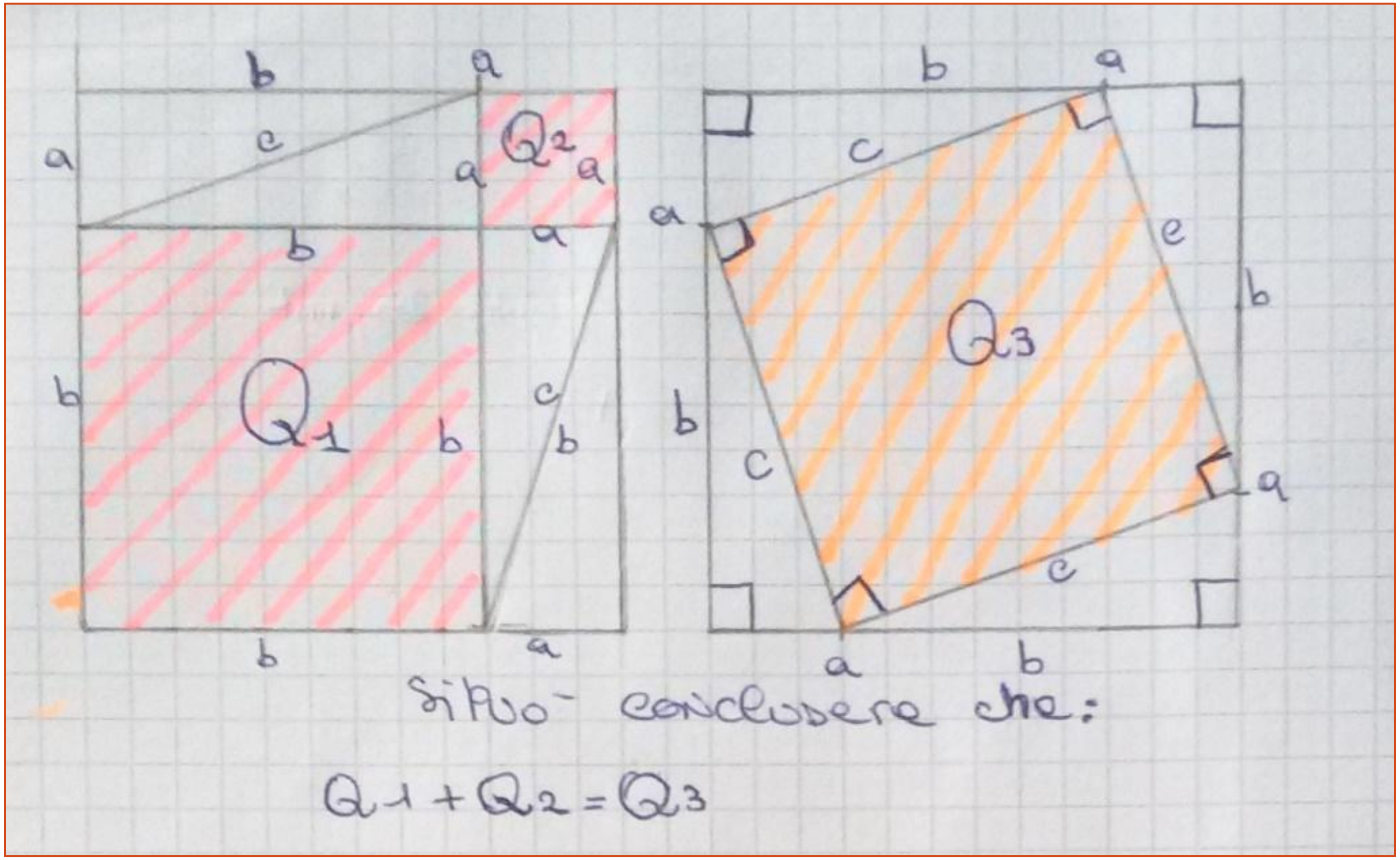
Generalizziamo per tutti i triangoli rettangoli isosceli:
"La somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa".

3. Generalizziamo e arriviamo all'enunciato

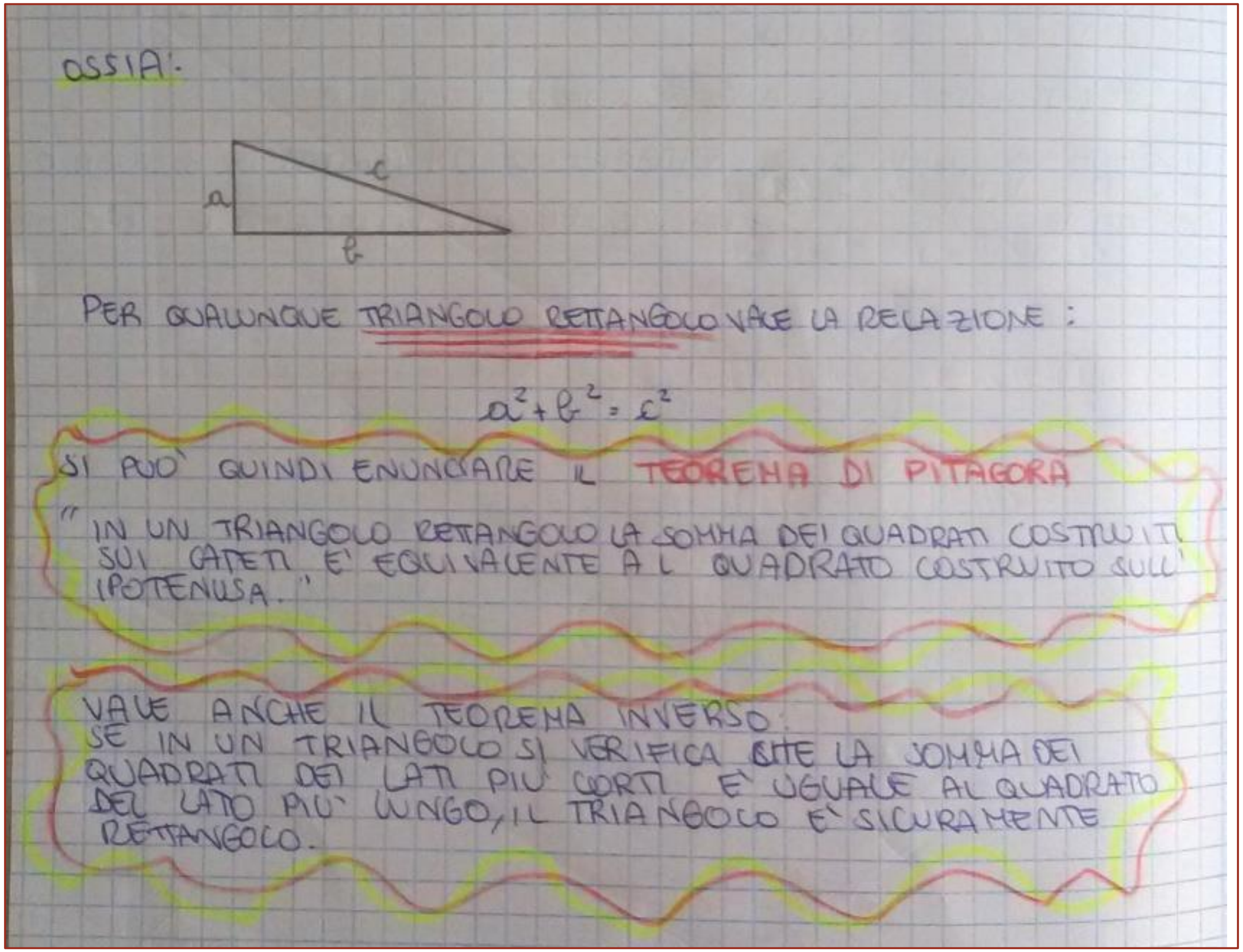
Si chiede: **E se il triangolo rettangolo non è isoscele?**
Proviamo con il triangolo scaleno (3, 4, 5)



Anche in questo caso si utilizza la carta con la quadrettatura da 1 cm in modo che i quadrati «sui cateti» e «sull'ipotenusa» siano disegnati correttamente. La quadreattatura consente, inoltre, di verificare facilmente la relazione tra le aree.



Attraverso la dimostrazione classica (quella da cui, solitamente, partono i libri di testo tradizionali) si generalizza a triangoli rettangoli qualsiasi. In questa fase l'insegnante ha guidato gli alunni nel disegno dei due quadrati e della loro suddivisione, e li ha portati alle conclusioni mediante una discussione collettiva orale.


OSSIA:

a
b
c

PER QUALUNQUE TRIANGOLO RETTANGOLO VALE LA RELAZIONE:

$$a^2+b^2=c^2$$

SI PUO' QUINDI ENUNCIARE IL TEOREMA DI PITAGORA

"IN UN TRIANGOLO RETTANGOLO LA SOMMA DEI QUADRATI COSTRUITI SUI CATETI E' EQUIVALENTE AL QUADRATO COSTRUITO SULL'IPOTENUSA."

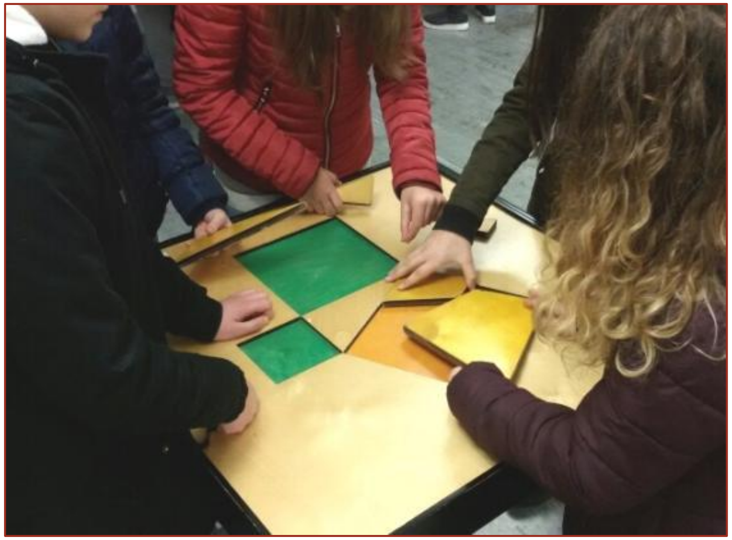
VALE ANCHE IL TEOREMA INVERSO:
SE IN UN TRIANGOLO SI VERIFICA CHE LA SOMMA DEI QUADRATI DEI LATI PIU' CORTI E' UGUALE AL QUADRATO DEL LATO PIU' LUNGO, IL TRIANGOLO E' SICURAMENTE RETTANGOLO.

Il Teorema di Pitagora...

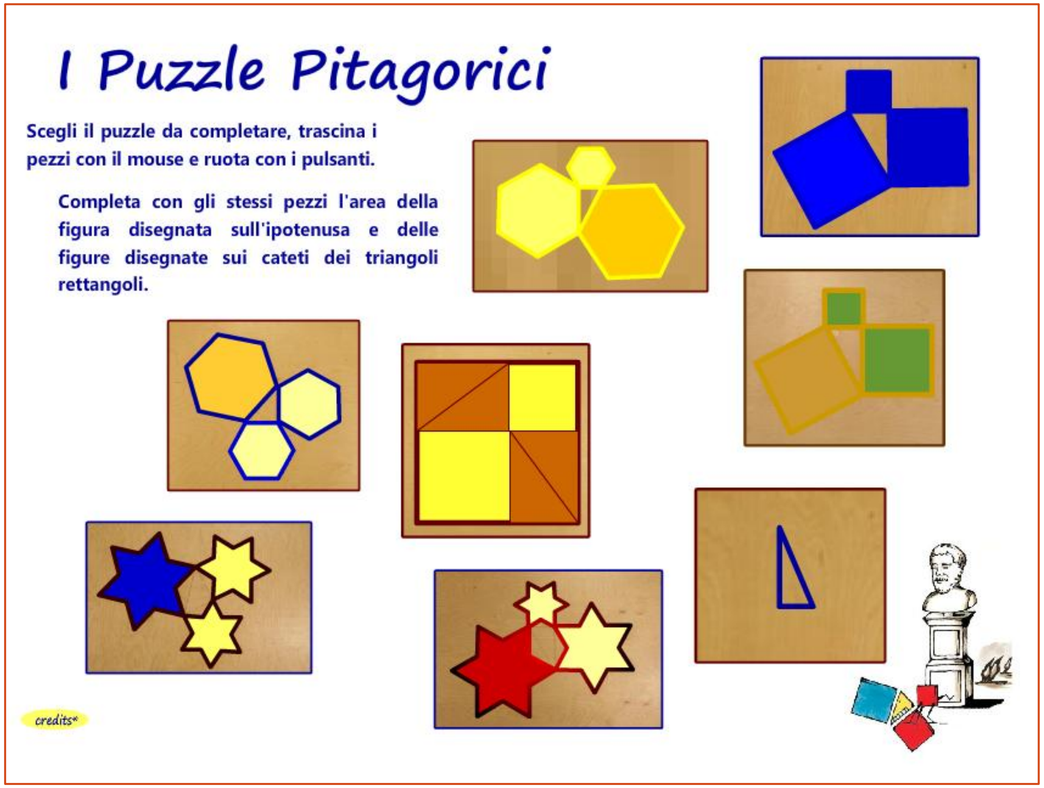
... e il Teorema inverso!

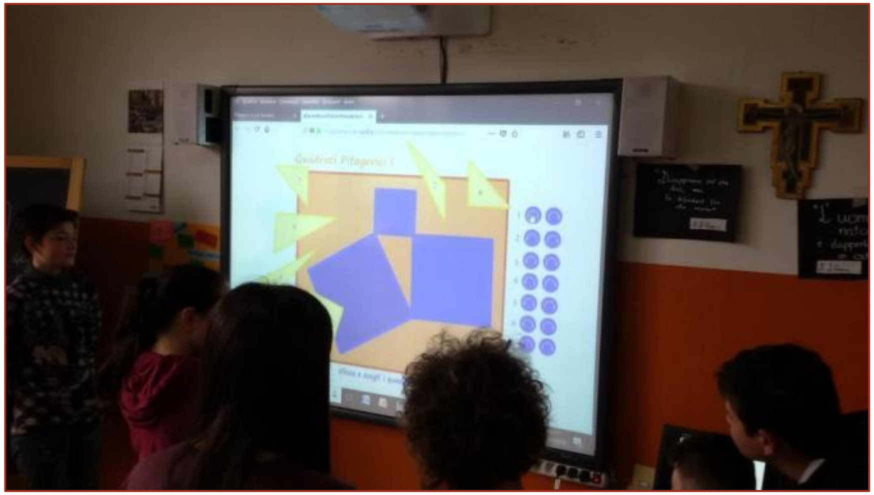
Dopo aver scritto l'enunciato del teorema di Pitagora si precisa che vale anche l'inverso, e che questo costituisce un altro teorema.

4. Giochiamo con Pitagora



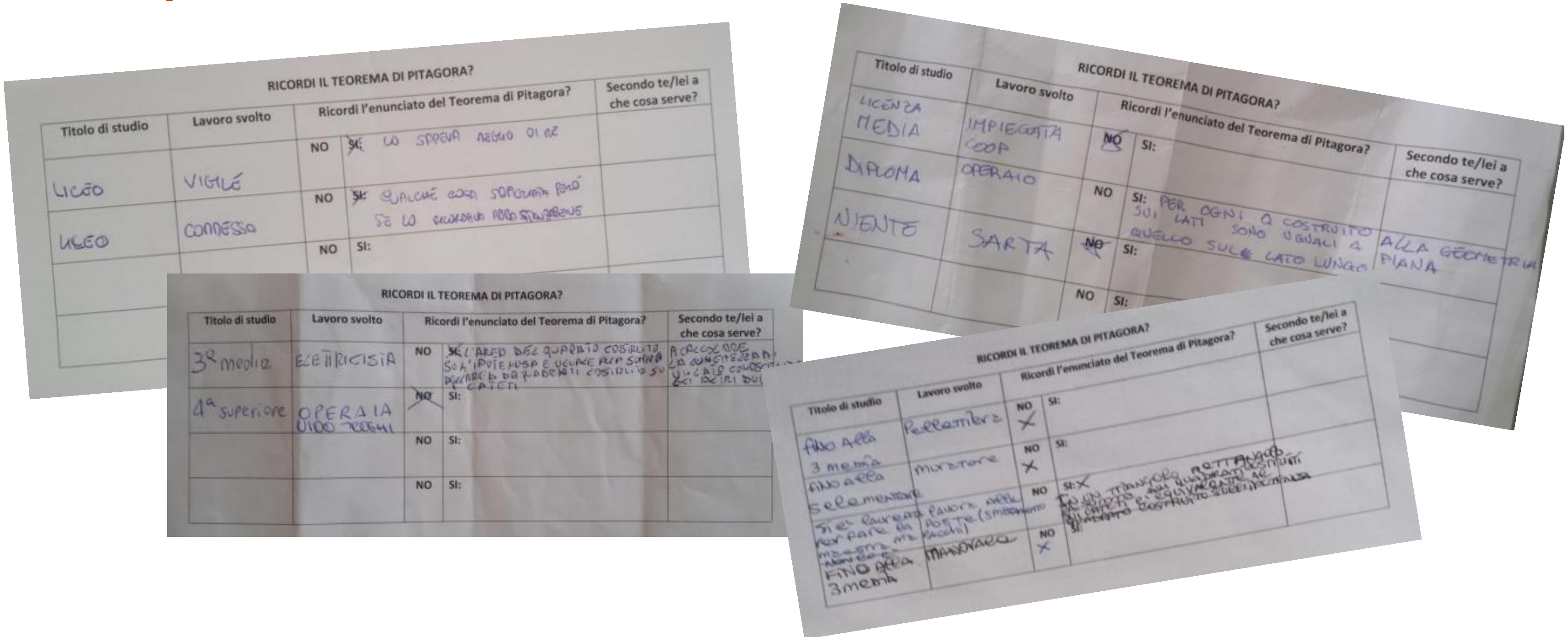
La dimostrazione pratica del teorema di Pitagora è stata fatta anche al Giardino di Archimede, dove gli alunni hanno potuto manipolare puzzle di legno di vario tipo.
Tra le postazioni disponibili, ce ne sono alcune in cui il teorema è esteso a figure geometriche simili (stelle, esagoni, ...) costruite sui lati di triangoli rettangoli. L’esperienza ha dato l’opportunità di accennare alla similitudine.

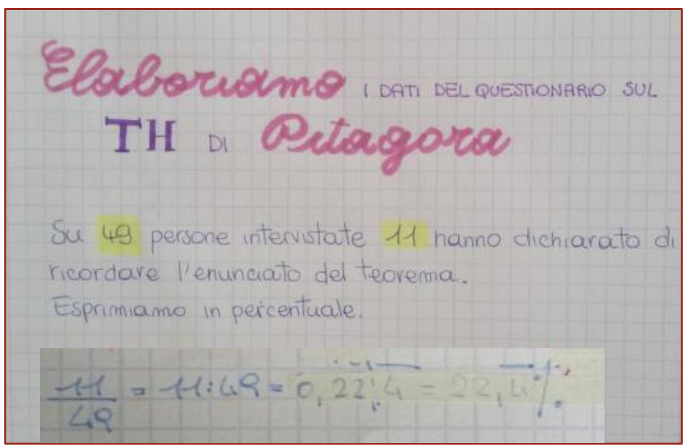




Sul sito del Giardino di Archimede, inoltre, sono disponibili vari puzzle in cui si dimostra ed utilizza il teorema di Pitagora. Alla loro risoluzione, è stato dedicato poco tempo, ma i ragazzi hanno potuto apprezzare anche l’aspetto ludico della geometria e confrontarsi, allo stesso tempo, con rotazioni e traslazioni.

5. Un po' di statistica: Chi se lo ricorda?



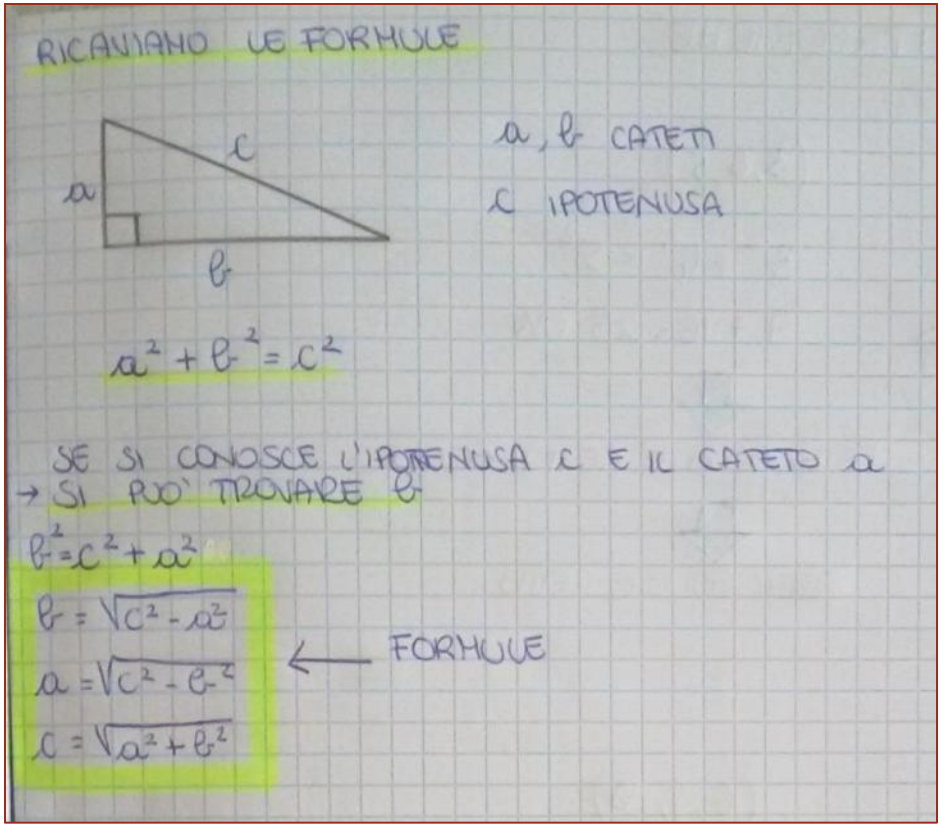


«11 su 49» → 22,4%

I ragazzi si sono divertiti a chiedere ad alcuni amici e parenti adulti se si ricordavano l'enunciato del Teorema di Pitagora. Con questo pretesto è stata fatta una piccola indagine statistica, esprimendo i dati in percentuale. Gli alunni hanno giustamente suggerito di mettere in relazione il ricordo con il livello scolare e il lavoro svolto (in forma rigorosamente anonima). A sorpresa alcuni, pur avendo studiato il teorema molti anni fa e non avendo più avuto occasione di utilizzarlo, se lo ricordavano perfettamente.

6. A che cosa serve il Teorema di Pitagora?

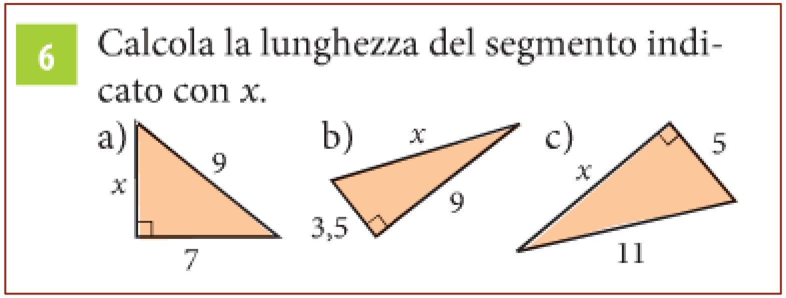
A questo punto del percorso ci si sofferma molto sul significato delle parole e su come il teorema di Pitagora ed il teorema inverso possano essere utilizzati. Alle domande:



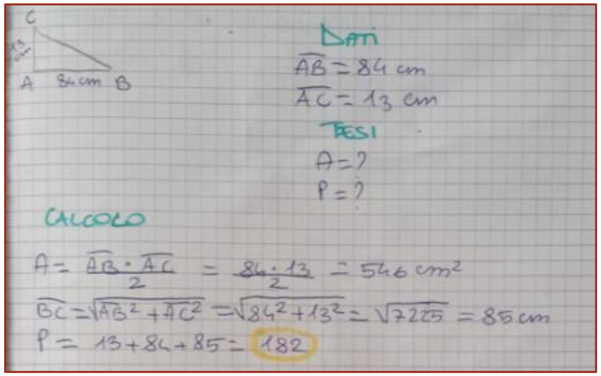
- **«A che cosa serve, secondo te, il teorema di Pitagora?»**
- **« E a che cosa serve il teorema inverso?»**

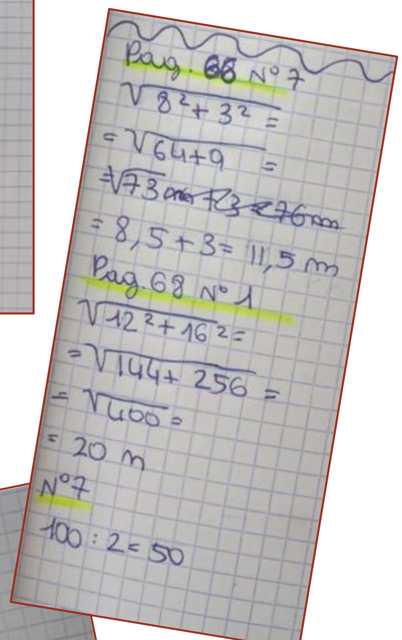
Inizialmente i ragazzi non sono in grado di rispondere. Si parte dalla prima domanda, e si riflette sul fatto che il teorema diretto parte dall'assunto che il triangolo su cui si ragiona è rettangolo e fornisce la relazione tra i lati. Dati due lati, quindi, si può trovare il terzo.

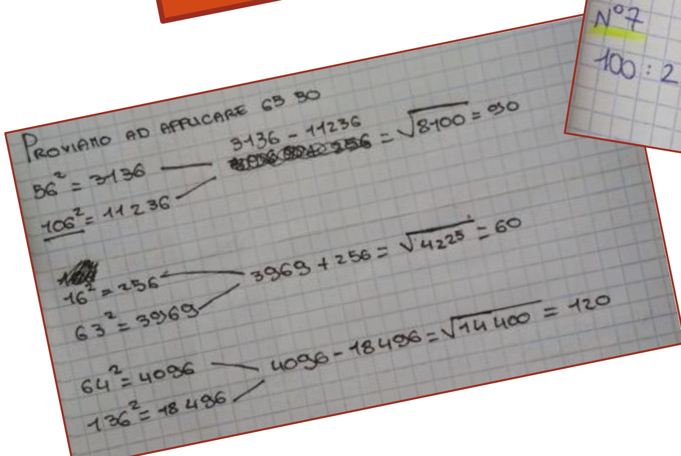
Ricaviamo, quindi, le formule necessarie, sempre ragionando sui quadrati dei lati.


6 Calcola la lunghezza del segmento indicato con x.

a) b) c)







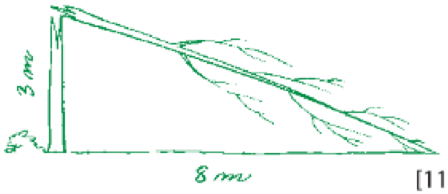
Sul libro
Esercizi tradizionali...

Come per la maggior parte degli argomenti di matematica è importante, una volta ricavate regole e proprietà, che i ragazzi acquisiscano gli automatismi ed imparino ad utilizzare correttamente le formule.
Nel caso del teorema di Pitagora, in cui si è lavorato tanto sull’equivalenza tra la somma dei quadrati sui cateti e quello sull’ipotenusa, è importante che, a questo punto, si impari ad utilizzare direttamente la formula per il calcolo di un cateto o dell’ipotenusa.

... ed esercizi più legati a situazioni reali

Il libro di testo («Contaci!», Ed. Zanichelli), per fortuna, è ricco di problemi in cui non si chiede esplicitamente il calcolo di cateti o ipotenusa, ma si deve applicare il teorema di Pitagora in contesti più concreti e legati alla realtà.

7 Il tronco dell'albero si è spezzato a un'altezza di tre metri da terra, e la cima ora tocca terra a 8 metri dalla base del tronco. Quanto era alto l'albero in origine?



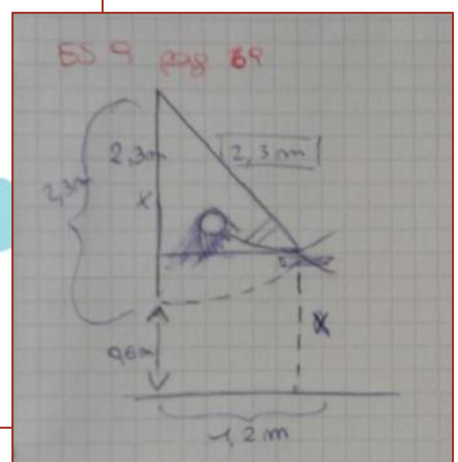
[11,5 m]

8 Calcola, approssimando il risultato ai centesimi:
a) l'altezza della tenda
b) l'area dell'entrata della tenda.

[b) 0,48 m^2]

20 Quando l'altalena è nel punto A, a quale altezza da terra si trova?

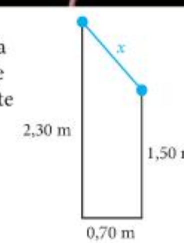
[≈ 0,9 m]



12

Calcola la distanza tra le due parallele asimmetriche usate nella ginnastica artistica.

[1,06 m]



Altre applicazioni nella vita quotidiana: le dimensioni dei monitor

1) Le dimensioni dei monitor vengono espresse come misura della lunghezza della diagonale in pollici.

Sapendo che 1" = 2,54 cm, verifica se le dimensioni in pollici del seguente televisore sono corrette.

SAMSUNG QE55Q9FNATXZT
Codice:752955

SMART TV QLED 55" Ultra HD 4K - Risoluzione: 3840x2160 pixel
Tecnologia 3700 PQ - WiFi - Ethernet - DLNA
Tuner Digitale Terrestre: DVB-T2 HEVCe Satellitare DVB-S2
Certificazione DGTVi Bollino Platinum
Classe efficienza energetica: B
Distribuito da Samsung Italia

NOVITÀ
Prezzo di listino: **€ 2999,00**
Sconto: **11,00%** Risparmi: **€330,00**
2669'00

Dimensioni e peso		
	Dimensioni:	123,12 x 78,91 x 28,43 cm
	Peso netto:	23,2Kg

2) Misura base e altezza di un tuo monitor (pc, telefono, tablet o tv) e calcola le dimensioni in pollici.

Es 1

DATI

$55'' = \overline{DB}$

$1'' = 2,54$ cm

$\overline{AB} = 123,12$ cm

$\overline{AD} = 78,91$ cm

TESI

$\overline{DB} = 55''$?

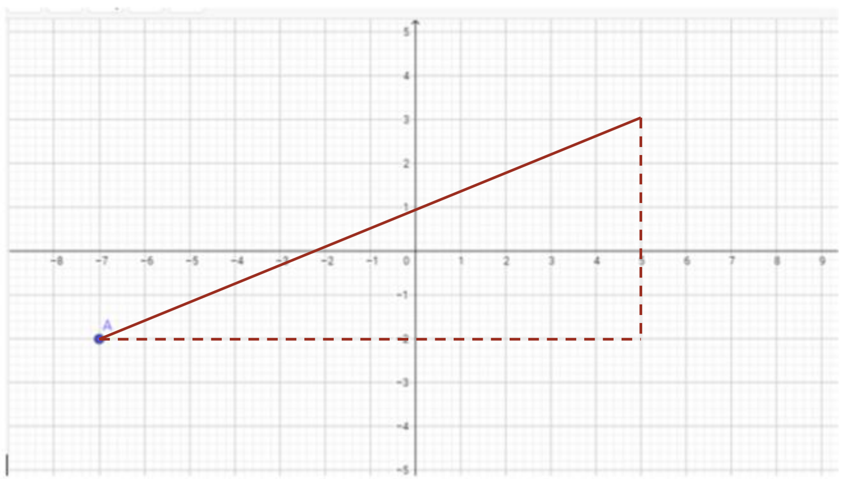
$\overline{DB} = \sqrt{123,12^2 + 78,91^2} = \sqrt{15.158,534 + 6.226,7881} = \sqrt{21385,322} \simeq 146,2$

$55'' \overset{?}{=} 146,2$ cm $\neq 146,2 : 2,54 \simeq \underline{57}''$

La maggior parte dei ragazzi, non conosce il pollice come unità di misura di lunghezza, né il modo in cui viene calcolata la dimensione dei monitor (lunghezza della diagonale espressa in pollici). Questi quesiti, oltre a suscitare l'interesse degli alunni, forniscono l'occasione per dare informazioni di cultura generale.

Altre applicazioni nella vita quotidiana: distanza tra due punti

3) Una nave, su un piano cartesiano che rappresenta una zona di mare aperto, si sposta dalla posizione (-7; -2) alla posizione (+5; +3). Calcolare la distanza percorsa.

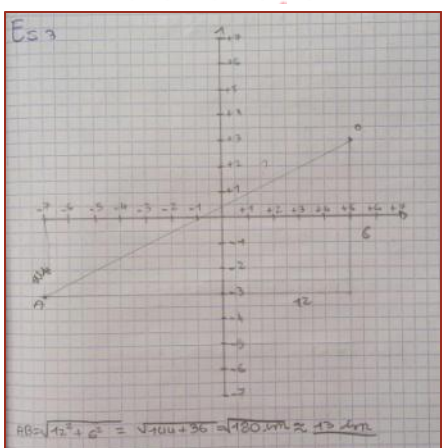


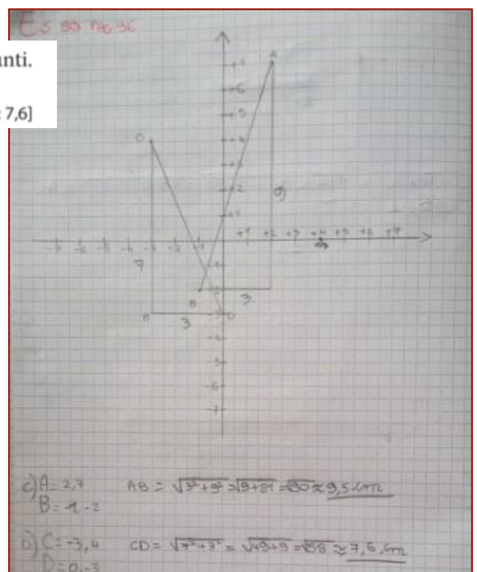
Gli alunni provano a risolvere da soli. In diversi capiscono che la distanza tra due punti è sempre l'ipotenusa di un triangolo rettangolo!

89 Calcola la distanza tra le coppie di punti.

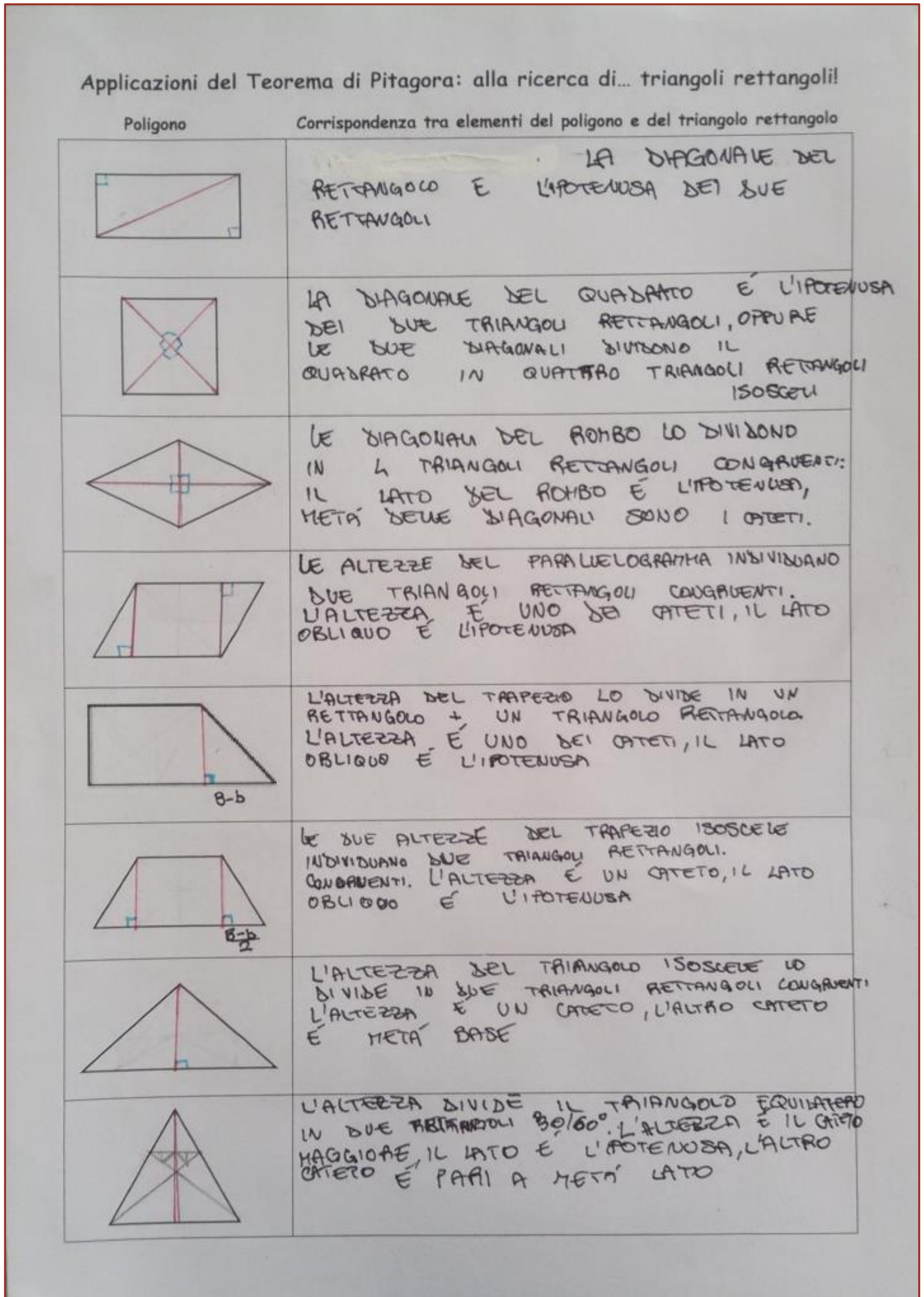
c) $A\ (2, 7)$ e $B(-1, -2)$

d) $C\ (-3, 4)$ e $D(0, -3)$ [9,5; 7,6]





Quando un oggetto si sposta da una posizione ad un'altra percorre una distanza che si può calcolare applicando il Teorema di Pitagora sul piano cartesiano. Questo, ovviamente, immaginando che la superficie su cui si sposta sia piana. Con i ragazzi si discute il fatto che, in realtà, la superficie terreste è curva.



Applicazioni del Teorema di Pitagora: alla ricerca di... triangoli rettangoli!

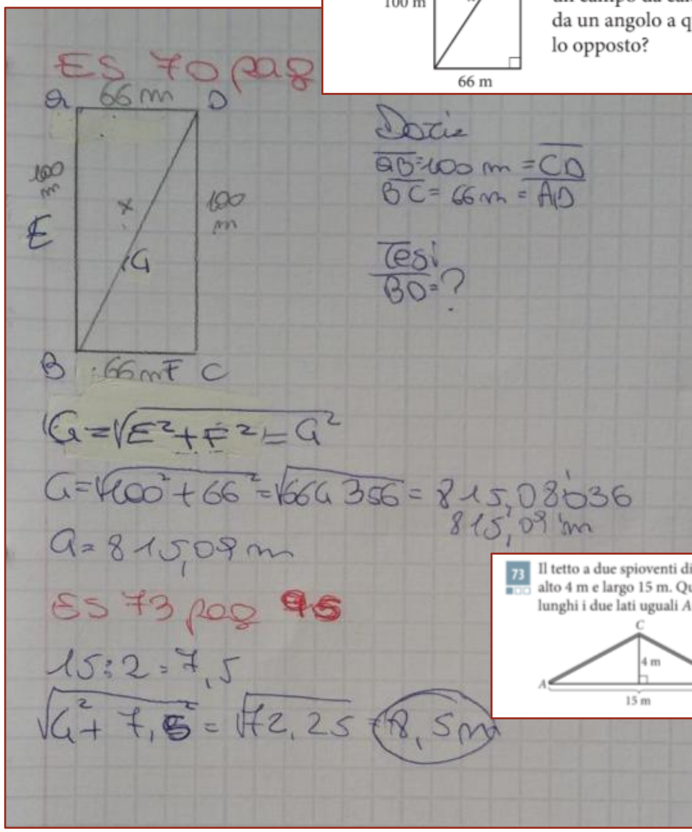
Poligono	Corrispondenza tra elementi del poligono e del triangolo rettangolo
	LA DIAGONALE DEL RETTANGOLO E L'IPOTENUSA DEI DUE RETTANGOLI
	LA DIAGONALE DEL QUADRATO É L'IPOTENUSA DEI DUE TRIANGOLI RETTANGOLI, OPPURE LE DUE DIAGONALI DIVIDONO IL QUADRATO IN QUATTRO TRIANGOLI RETTANGOLI ISOSCELI
	LE DIAGONALI DEL ROMBO LO DIVIDONO IN 4 TRIANGOLI RETTANGOLI CONGRUENTI: IL LATO DEL ROMBO É L'IPOTENUSA, METÁ DELLE DIAGONALI SONO I CATETI.
	LE ALTEZZE DEL PARALLELOGRAMMA INDIVIDUANO DUE TRIANGOLI RETTANGOLI CONGRUENTI. L'ALTEZZA É UNO DEI CATETI, IL LATO OBLIQUO É L'IPOTENUSA
B-b	L'ALTEZZA DEL TRAPEZIO LO DIVIDE IN UN RETTANGOLO + UN TRIANGOLO RETTANGOLO. L'ALTEZZA É UNO DEI CATETI, IL LATO OBLIQUO É L'IPOTENUSA
$\frac{B-b}{2}$	LE DUE ALTEZZE DEL TRAPEZIO ISOSCELE INDIVIDUANO DUE TRIANGOLI RETTANGOLI. CONGRUENTI. L'ALTEZZA É UN CATETO, IL LATO OBLIQUO É L'IPOTENUSA
	L'ALTEZZA DEL TRIANGOLO ISOSCELE LO DIVIDE IN DUE TRIANGOLI RETTANGOLI CONGRUENTI L'ALTEZZA É UN CATETO, L'ALTRO CATETO É METÁ BASE
	L'ALTEZZA DIVIDE IL TRIANGOLO EQUILATERO IN DUE RETTANGOLI 30/60°. L'ALTEZZA É IL CATETO MAGGIORE, IL LATO É L'IPOTENUSA, L'ALTRO CATETO É PARI A METÁ LATO

Applicazioni a figure più complesse

Anziché dedicare una lezione ad ogni figura geometrica, come spesso fanno i libri di testo, si lascia che i ragazzi cerchino, nelle figure geometriche proposte, triangoli rettangoli a cui si può applicare il teorema di Pitagora. Si chiede anche di individuare la relazione tra gli elementi geometrici della figura di partenza (lati, diagonali, altezze, ...) e i lati del triangolo rettangolo (cosa diventa cateto, cosa diventa ipotenusa?).

La maggior parte degli alunni ha compilato correttamente la scheda, successivamente corretta alla LIM sotto la guida dell'insegnante. Ai ragazzi con DSA o con difficoltà a scrivere è stata, poi, data la versione finale corretta.

Applichiamo risolvendo problemi tradizionali


ES 70 pag

A 66 m D

100 m

E

x

G

100 m

B 66 m F C

Dati

$\overline{AB} = 100\ m = \overline{CD}$

$\overline{BC} = 66\ m = \overline{AD}$

Tesi

$\overline{BD} = ?$

$G = \sqrt{E^2 + F^2} = G^2$

$G = \sqrt{100^2 + 66^2} = \sqrt{14356} = 119{,}8165$

$119{,}82\ m$

$G = 119{,}82\ m$

ES 73 pag 95

$15 : 2 = 7{,}5$

$\sqrt{4^2 + 7{,}5^2} = \sqrt{72{,}25} = 8{,}5\ m$

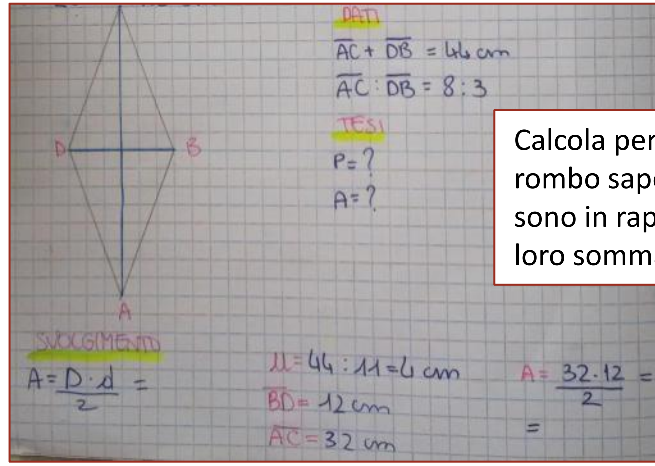
70

Che distanza si percorre se si attraversa un campo da calcio da un angolo a quello opposto?

73

Il tetto a due spioventi di una serra è alto 4 m e largo 15 m. Quanto sono lunghi i due lati uguali AC e BC?

[8,5 m]


D B A

DATI

$\overline{AC} + \overline{DB} = 44\ cm$

$\overline{AC} : \overline{DB} = 8 : 3$

TESI

$P = ?$

$A = ?$

SVOLGIMENTO

$A = \frac{D \cdot d}{2} =$

$u = 44 : 11 = 4\ cm$

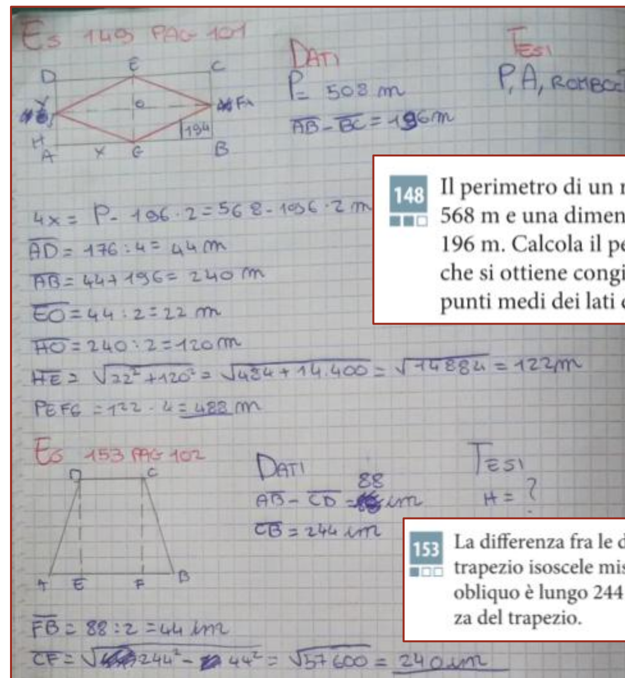
$\overline{BD} = 12\ cm$

$\overline{AC} = 32\ cm$

$A = \frac{32 \cdot 12}{2} =$

$=$

Calcola perimetro ed area di un rombo sapendo che le diagonali sono in rapporto 8:3 e che la loro somma è 88 cm.


Es 148 PAG 101

D E C

H O F

A x G B

Dati

$P = 568\ m$

$\overline{AB} - \overline{BC} = 196\ m$

Tesi

P, A, ROMBO?

$4x = P - 196 \cdot 2 = 568 - 196 \cdot 2\ m$

$\overline{AD} = 176 : 4 = 44\ m$

$\overline{AB} = 44 + 196 = 240\ m$

$\overline{EO} = 44 : 2 = 22\ m$

$\overline{HO} = 240 : 2 = 120\ m$

$\overline{HE} = \sqrt{22^2 + 120^2} = \sqrt{484 + 14400} = \sqrt{14884} = 122\ m$

$P_{EFGH} = 122 \cdot 4 = 488\ m$

Es 153 PAG 102

D C

A E F B

Dati

$\overline{AB} - \overline{CD} = 88\ cm$

$\overline{CB} = 244\ cm$

Tesi

$H = ?$

$\overline{FB} = 88 : 2 = 44\ cm$

$\overline{CF} = \sqrt{244^2 - 44^2} = \sqrt{57600} = 240\ cm$

148

Il perimetro di un rettangolo misura 568 m e una dimensione supera l'altra di 196 m. Calcola il perimetro del rombo che si ottiene congiungendo in ordine i punti medi dei lati del rettangolo. [488 m]

153

La differenza fra le due basi di un trapezio isoscele misura 88 cm e il lato obliquo è lungo 244 cm. Calcola l'altezza del trapezio. [240 cm]

7. A che cosa serve il Teorema inverso?

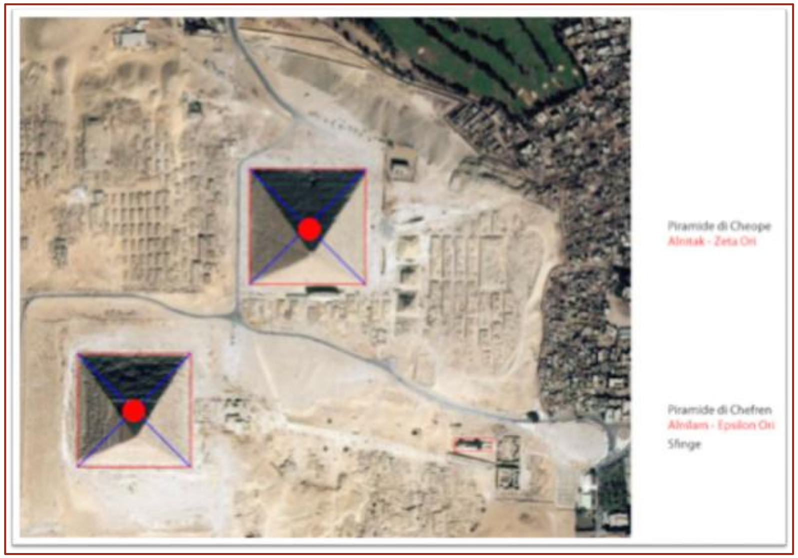
A questo punto del percorso, quando gli alunni hanno abbastanza familiarità con il teorema di Pitagora e con le sue applicazioni, si concentrano l'attenzione e le attività sul teorema inverso. Dal punto di vista storico, infatti, questo è forse più importante del teorema diretto!

Con i ragazzi, quindi, si torna alla domanda formulata qualche giorno prima, e a cui non avevano saputo dare risposta. Si conclude che:

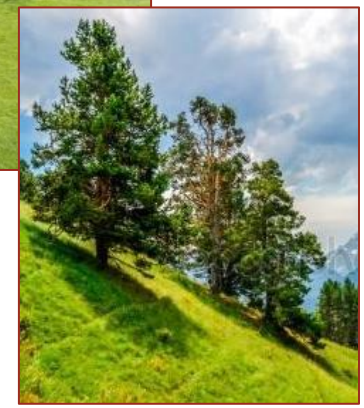
Il teorema di Pitagora inverso consente di verificare se un tringolo è rettangolo e quindi se un angolo è retto.

L'insegnante propone una serie di immagini, tra cui la foto aerea della zona intorno alla scuola di Rignano. Chiede anche agli alunni di guardarsi intorno e di individuare angoli retti negli oggetti che li circondano e che utilizzano quotidianamente. Si conclude facilmente che in natura gli angoli retti sono un'eccezione (la comprensione del motivo, da attribuirsi alla geometria del legame chimico, viene rimandata a periodi successivi). L'angolo retto, invece, è comodo per l'uomo!

Angoli retti in natura e negli oggetti costruiti dall’uomo



La spianata di Giza

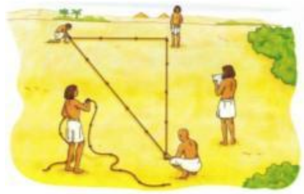


Tronchi perpendicolari al terreno... e non

Rignano sull’Arno (o un qualsiasi paese o città!)

L’aula della II B

Il teorema di Pitagora... prima di Pitagora



In classe si racconta che ai tempi degli antichi Egizi, ben prima di Pitagora e della scuola pitagorica, tracciare angoli retti era una necessità pratica. Per costruire le piramidi (a base incredibilmente quadrata) e per ridefinire i confini dei terreni dopo ogni inondazione annuale del Nilo, venivano chiamati i «tenditori di corde», che conoscevano la terna (3, 4, 5).

La terna (3, 4, 5)

L'insegnante fornisce una corda con tanti piccoli nodi equidistanti, e chiede ai ragazzi, suddivisi in piccoli gruppi, di costruire triangoli aventi i lati di 3, 4 e 5 segmenti, verificando se sono rettangoli.

La terna doppia (6, 8, 10)

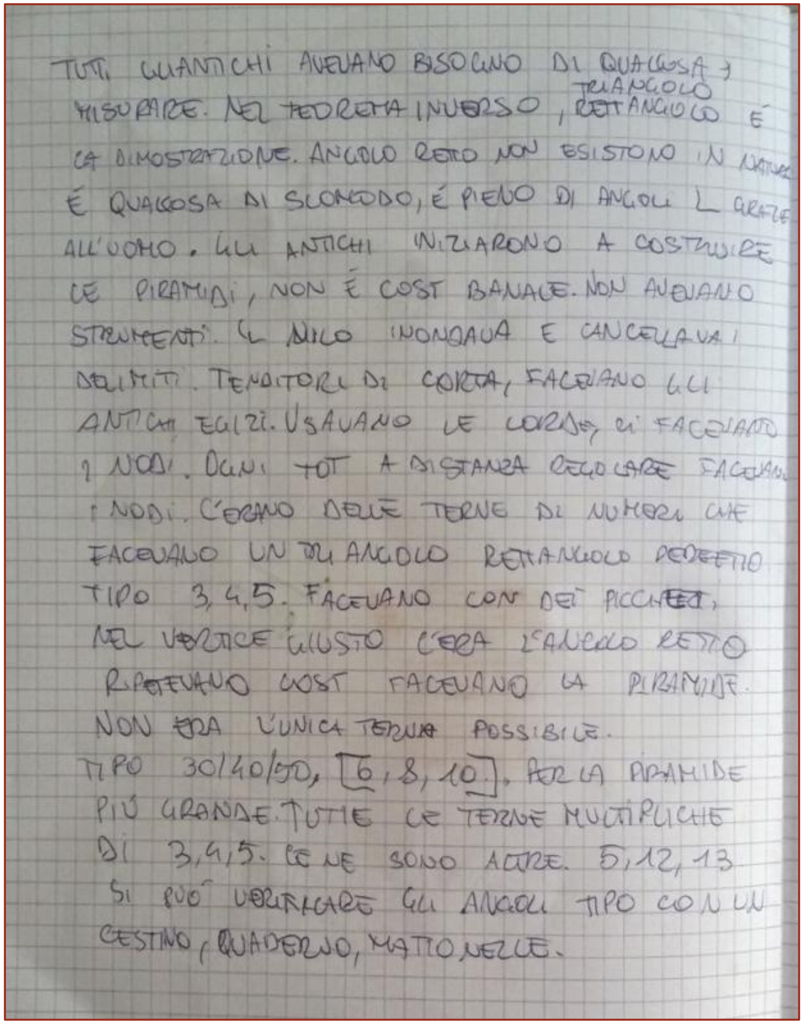
L'angolo retto viene confrontato con vari oggetti costruiti dall'uomo.

E se si volessero ottenere triangoli della stessa forma, ma più grandi?

Gli alunni suggeriscono spontaneamente di raddoppiare o decuplicare i lati.

Si provano anche altre terne conosciute dai popoli antichi.

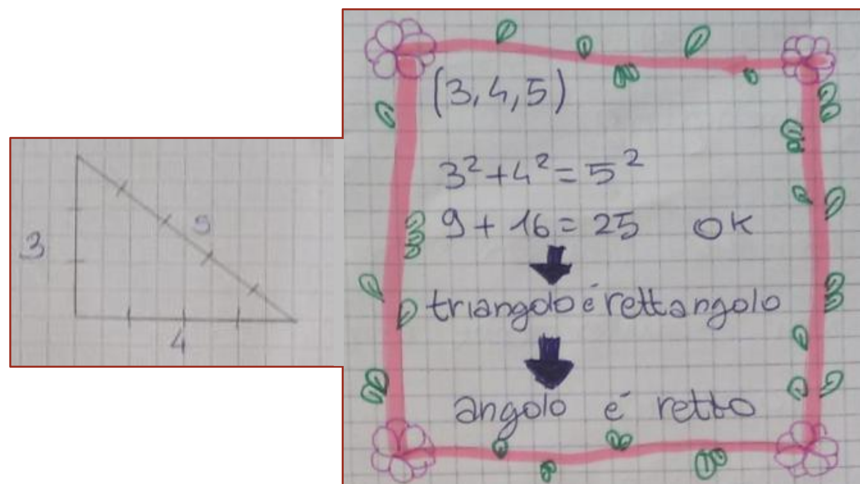
La terna (5, 12, 13)



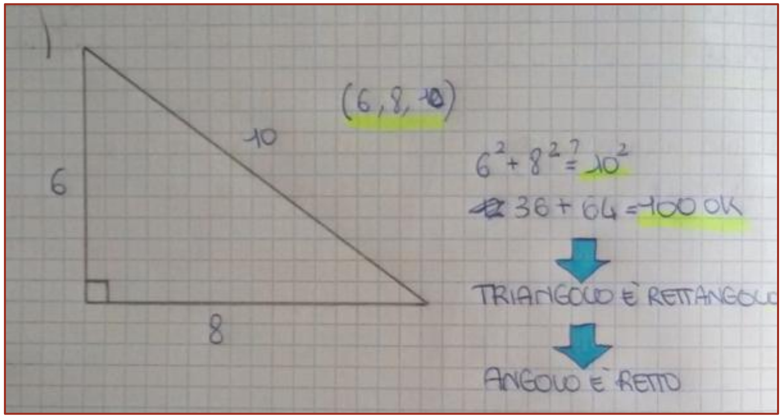
TUTTI QUANTI CHI AVEVANO BISOGNO DI QUALCOSA DA MISURARE. NEL TEOREMA INVERSO, TRIANGOLO RETTANGOLO È LA DIMOSTRAZIONE. ANGOLO RETTO NON ESISTONO IN NATURA È QUALCOSA DI SCOMODO, È PIENO DI ANGOLI L GRAZIE ALL'UOMO. GLI ANTICHI INIZIARONO A COSTRUIRE LE PIRAMIDI, NON È COSÌ BANALE. NON AVEVANO STRUMENTI. IL NILO INONDAVA E CANCELLAVA I DELIMITI. TENDITORI DI CORDA, FACEVANO GLI ANTICHI EGIZI. USAVANO LE CORDE, CI FACEVANO I NODI. OGNI TOT A DISTANZA REGOLARE FACEVANO I NODI. C'ERANO DELLE TERNE DI NUMERI CHE FACEVANO UN TRIANGOLO RETTANGOLO PERFETTO TIPO 3,4,5. FACEVANO CON DEI PICCHETTI, NEL VERTICE GIUSTO C'ERA L'ANGOLO RETTO RIPETEVANO COSÌ FACEVANO LA PIRAMIDE. NON ERA L'UNICA TERNA POSSIBILE. TIPO 30/40/50, [6, 8, 10]. PER LA PIRAMIDE PIÙ GRANDE. TUTTE LE TERNE MULTIPLICHE DI 3,4,5. CE NE SONO ALTRE. 5,12,13 SI PUÒ VERIFICARE GLI ANGOLI TIPO CON UN CESTINO, QUADERNO, MATTONELLE.

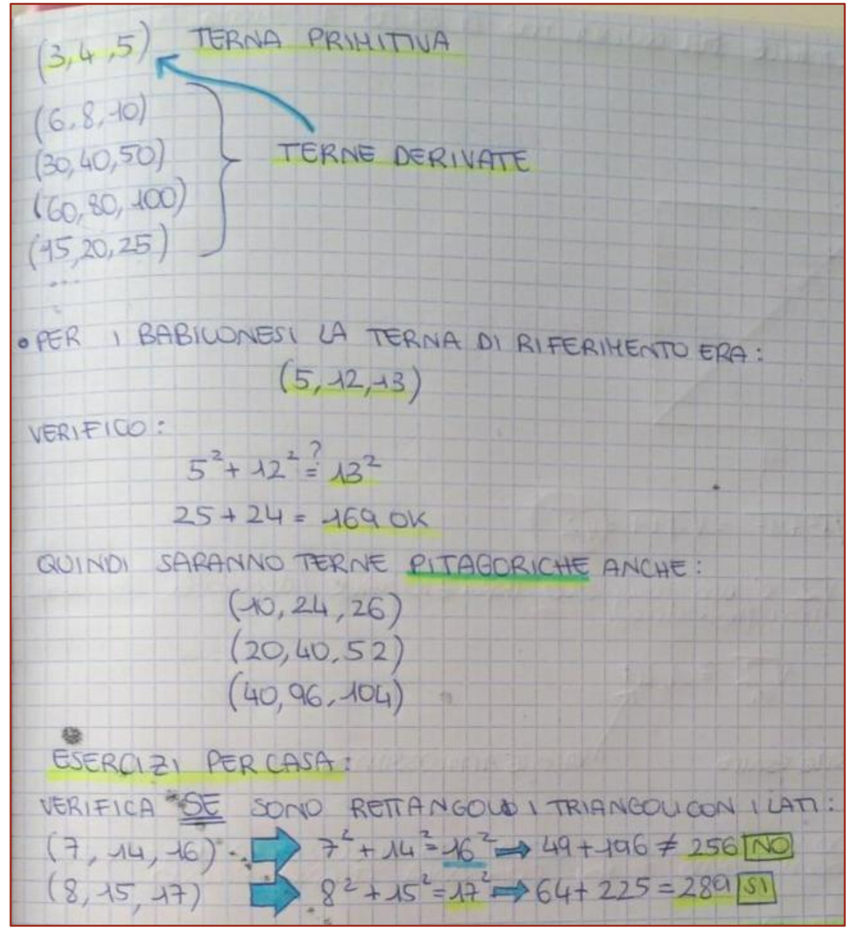
Provo a riassumere e a spiegare

Per casa, al fine di consolidare quanto visto e appreso, si chiede che gli alunni descrivano l'esperienza, soffermandosi, in particolare, sugli aspetti matematici. Si chiede di verificare se l'angolo compreso tra i lati di 3 e 4 sia retto. I ragazzi hanno già conosciuto la terna (3, 4, 5), ma la consegna, questa volta, punta sull'angolo retto e non sull'applicazione meccanica del teorema di Pitagora, e serve da spunto per la lezione successiva.

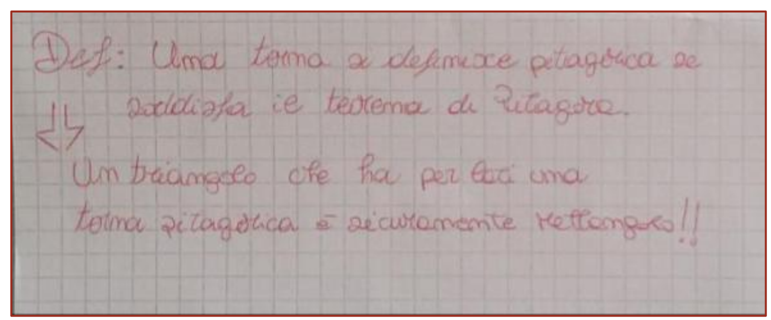


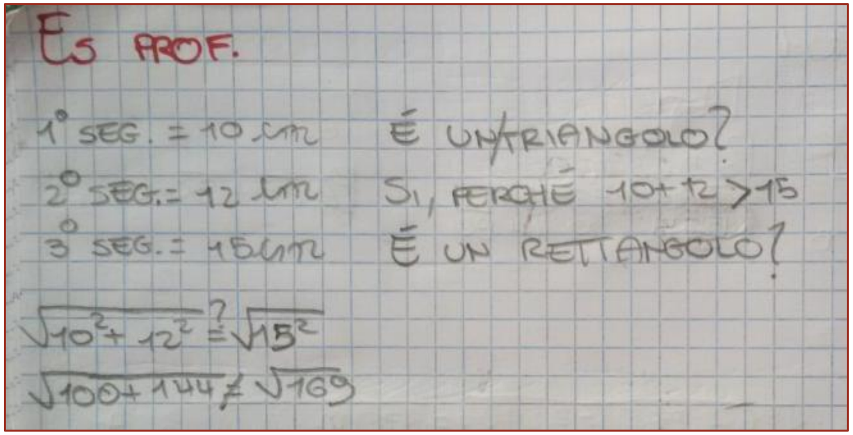
Terne, terne pitagoriche ed angoli retti



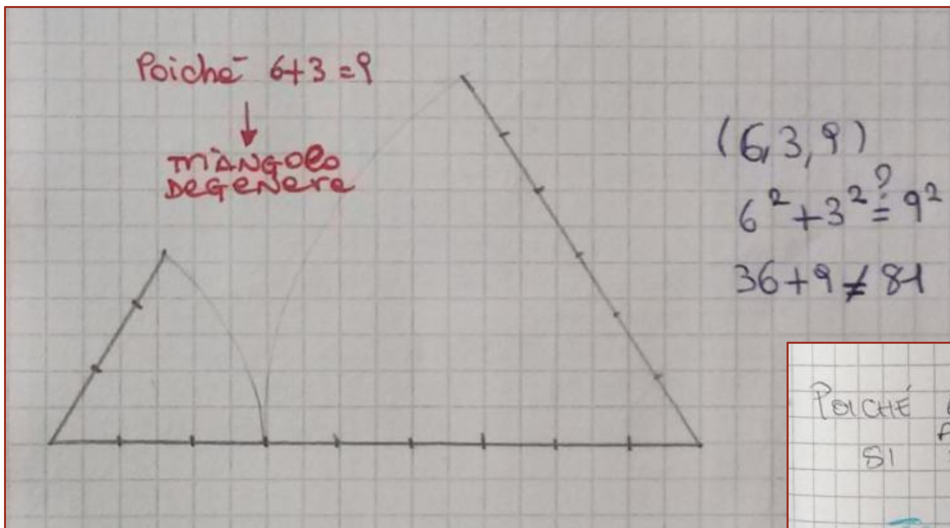


In questa fase di concettualizzazione si riprendono le terne sperimentate con le corde e si definiscono le terne pitagoriche come **gruppi di tre numeri che soddisfano il teorema di Pitagora.**
Le terne pitagoriche, e quindi il teorema inverso, diventano lo strumento per verificare se un angolo è retto.
Nella deduzione delle terne pitagoriche derivate c'è l'idea intuitiva di similitudine (ingrandimenti e riduzioni).

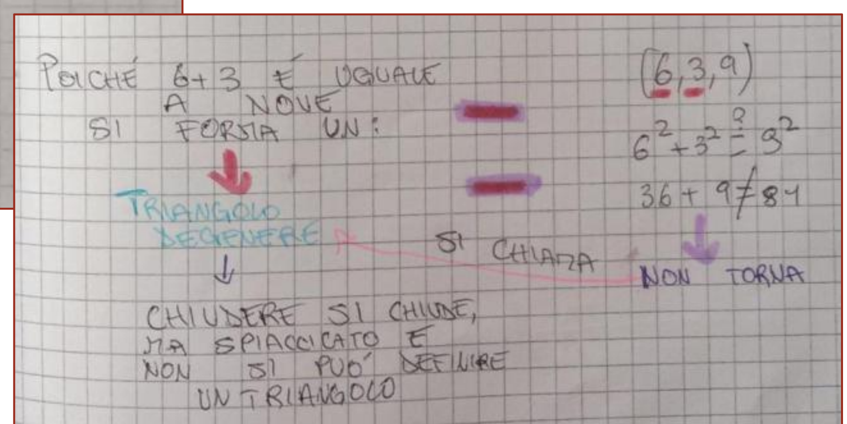




L'applicazione del teorema inverso per verificare se un triangolo è rettangolo offre la possibilità di riprendere il criterio per la costruzione di un triangolo. Infatti non per tutti gli alunni è chiaro che se si prendono tre segmenti di lunghezza qualunque, non sempre si riesce a costruire un triangolo.



Tra le varie possibilità che si prendono in considerazione c'è anche il caso limite, cioè quello dei triangoli degeneri. I ragazzi provano con il disegno e con le striscioline di carta.



Attraverso i passaggi precedenti, quindi, si fa in modo che i ragazzi imparino a ragionare secondo lo schema:

Terna qualsiasi di numeri (a, b, c)

↓

Si può costrure un triangolo?

↓

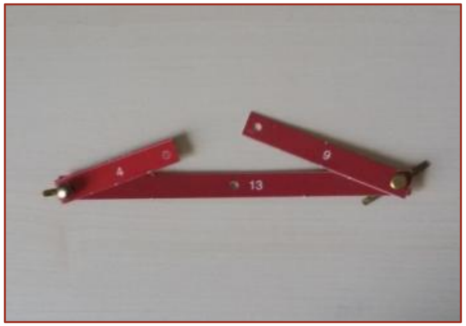
Se sì, la terna soddisfa il teorema di Pitagora?

↓

Se sì, il triangolo e rettangolo

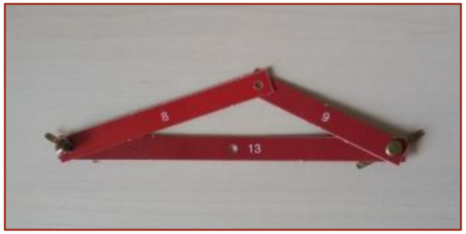
↓

L’angolo compreso
tra i lati più corti è retto



non si chiude

degenere

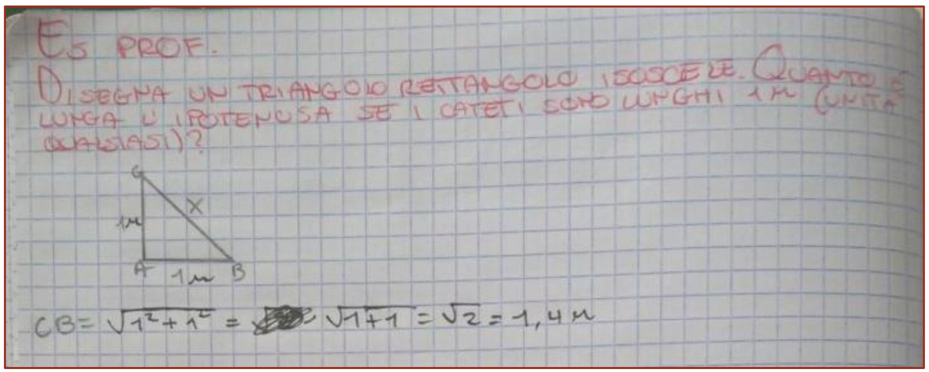


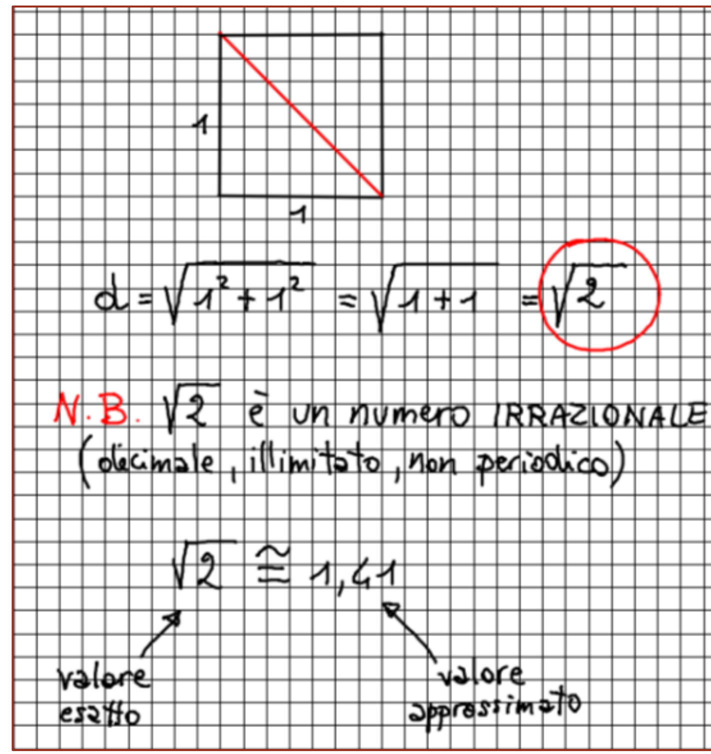
Si chiude,
non rettangolo

Si chiude,
rettangolo

8. Significato di $\sqrt{2}$

Tornando ora al teorema di Pitagora, ci si concentra sul significato e l'utilizzo di $\sqrt{2}$. Prima di tutto si chiede agli alunni di calcolare, individualmente, la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele con i cateti di 1, ossia della diagonale di un quadrato di lato unitario.



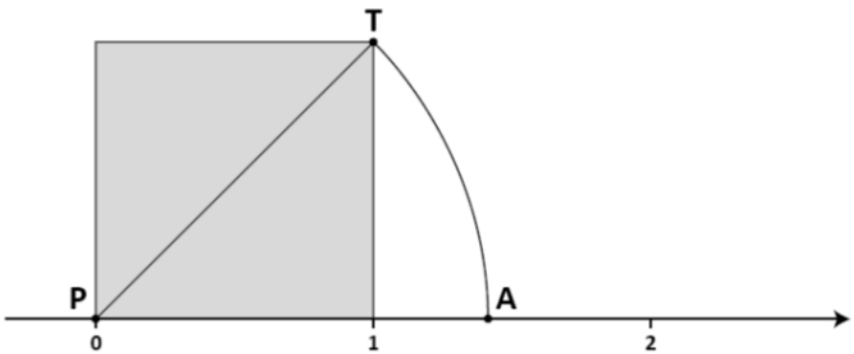


Si corregge, poi, e si commenta insieme alla LIM, concludendo che $\sqrt{2}$ è un valore esatto, mentre 1,41 è un valore approssimato, non necessariamente più comodo da utilizzare.

Dalla P.N. 2016

D14. In figura sono rappresentati:

- la retta dei numeri sulla quale è stato disegnato un quadrato;
- un arco TA di circonferenza di centro P e raggio PT.

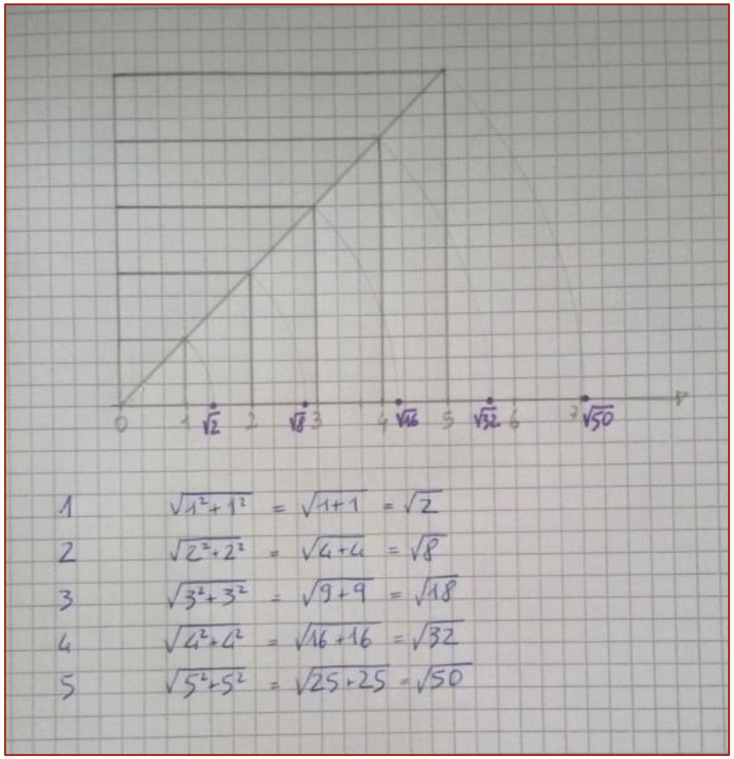


Completa la frase.

Il punto A sulla retta dei numeri corrisponde al numero $\sqrt{\ldots}$ **2**

I ragazzi non hanno difficoltà, a questo punto, a risolvere il quesito delle prove Invalsi 2016. Si propone di trovare altri numeri irrazionali che si possano rappresentare con lo stesso metodo.

Dopo aver valutato e discusso insieme, si arriva a questo disegno:



Dall'aritmetica alla geometria, e viceversa.

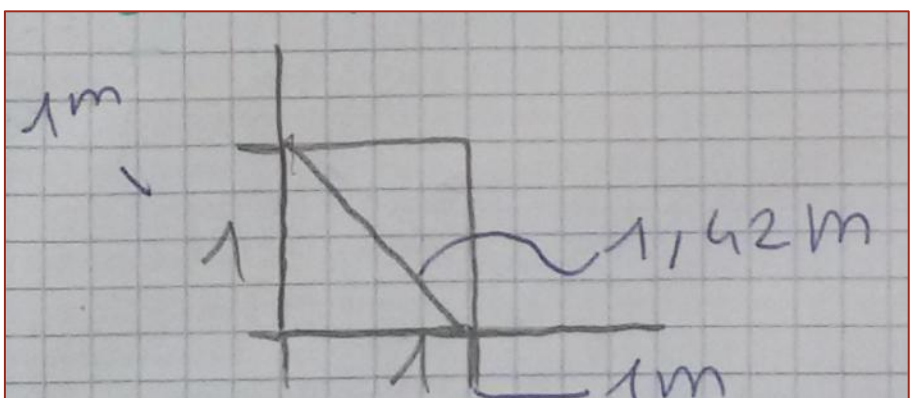
Si pone ora il seguente problema, chiedendo di applicare $\sqrt{2}$:

Provate a trovare un modo, facendo delle misure opportune, per verificare se l'angolo di un certo ambiente è RETTO..

TERESA: DIVIDO LA STANZA A METÁ (CON LA DIAGONALE), MISURO LA LUNGHEZZA DI OGNI LATO E VERIFICO SE É UNA TERNA PITAGORICA.

PROF: OK, MA LA $\sqrt{2}$ DOV'É?

Teresa propone una soluzione, ripensando alle terne pitagoriche e al teorema inverso.

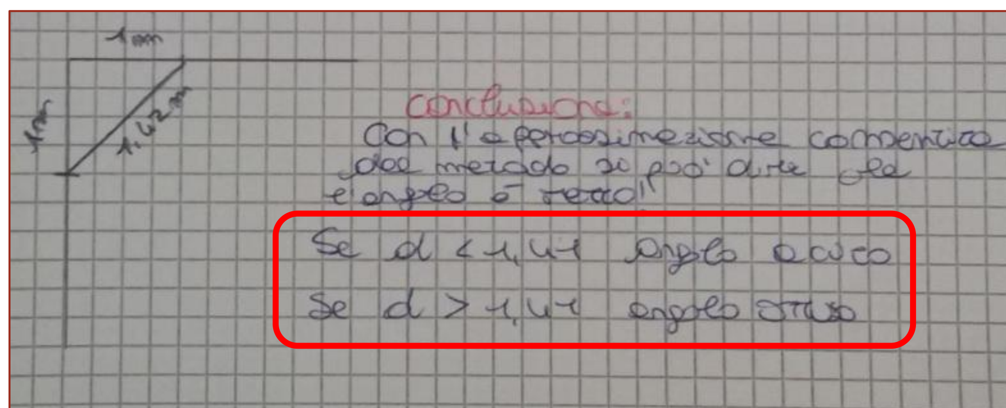


Giovanni risolve con un disegno e si guadagna la possibilità di verificare, con l’aiuto di due compagni: su ogni parete si misura 1m, quindi si misura la lunghezza della diagonale. In base al valore di questa si può dire se l’angolo è retto o meno.

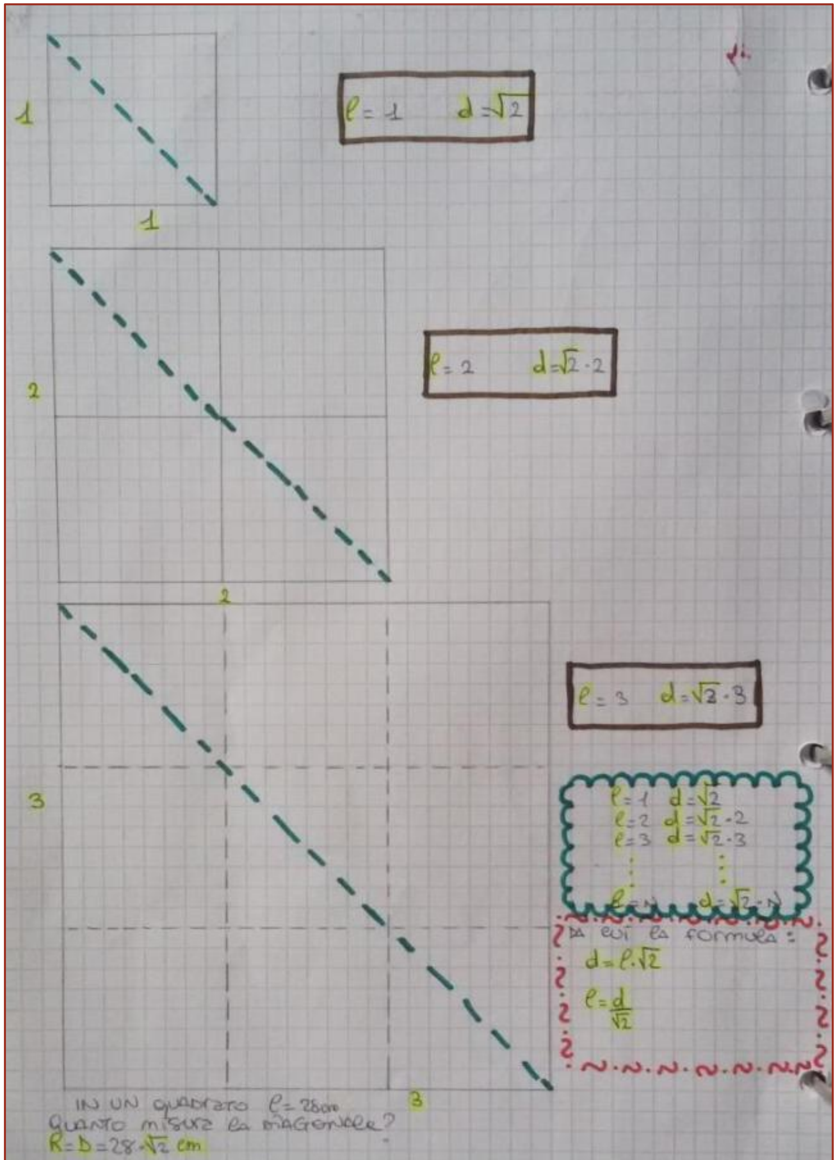
Questo metodo, che è stato chiamato «del geometra», perché suggerito all'insegnante da un architetto che lo ha proposto all'esame di stato per geometri, abbiamo verificato che, con l'approssimazione consentita dagli strumenti utilizzati, l'angolo compreso tra le pareti dell'aula è retto. Abbiamo, quindi, generalizzato, prendendo in considerazione tutti i casi possibili:

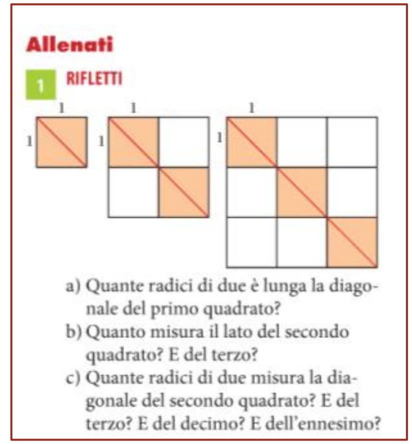
$$d \sim \sqrt{2}$$

angolo retto



Relazione tra lato e diagonale del quadrato con il metodo di Emma Castelnuovo





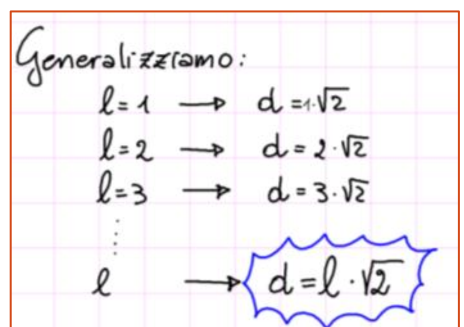
Allenati

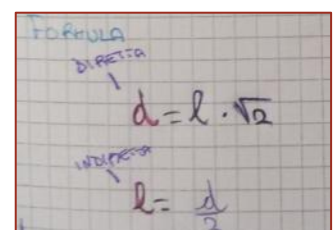
1 RIFLETTI

a) Quante radici di due è lunga la diagonale del primo quadrato?
b) Quanto misura il lato del secondo quadrato? E del terzo?
c) Quante radici di due misura la diagonale del secondo quadrato? E del terzo? E del decimo? E dell'ennesimo?

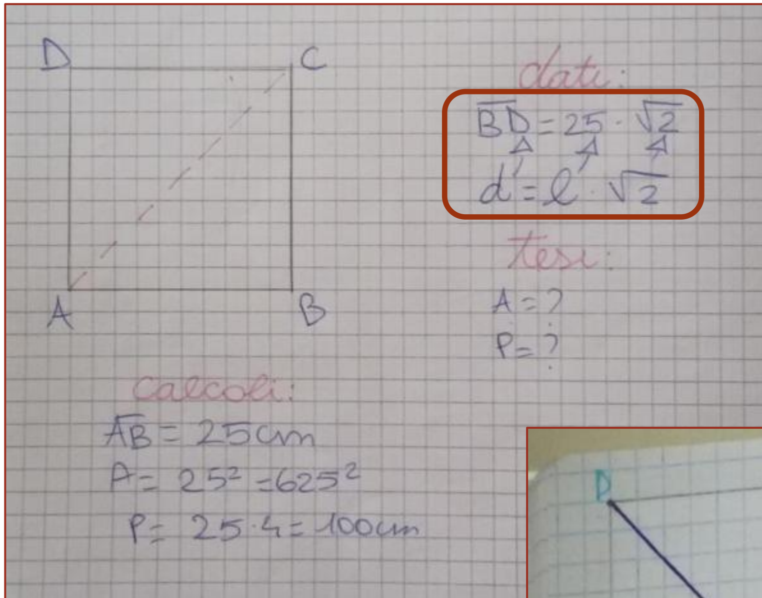
Anche sul libro di testo

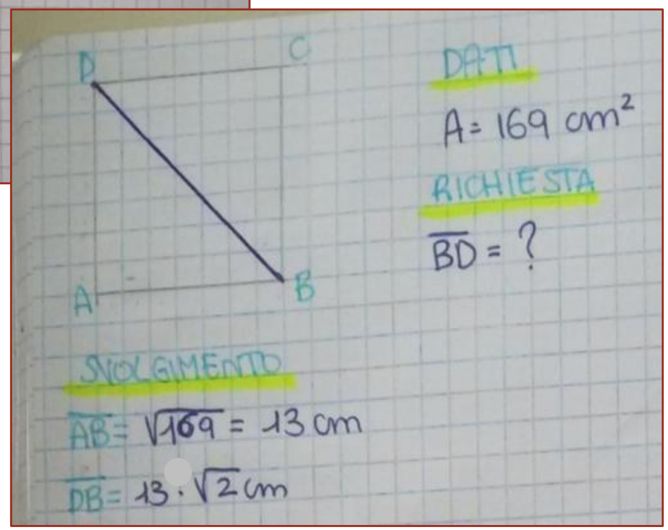
La relazione tra il lato e la diagonale del quadrato viene ricavata chiedendo agli alunni di disegnare di nuovo il quadrato di lato 1, poi di lato 2, poi di lato 3, ... e di vedere quante volte, per ogni figura, la $\sqrt{2}$ è contenuta nella diagonale. Si arriva così, per induzione, alla formula generale:

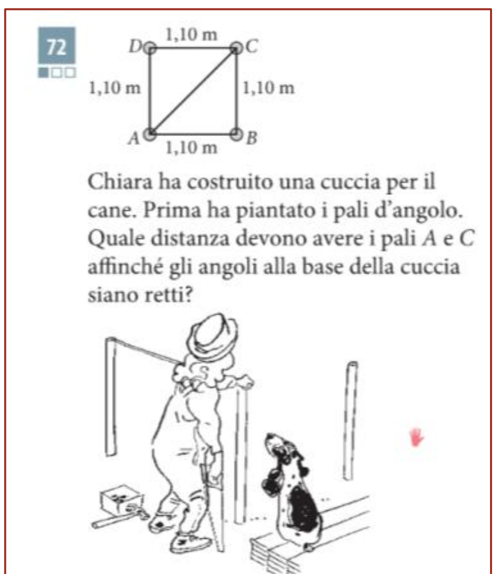




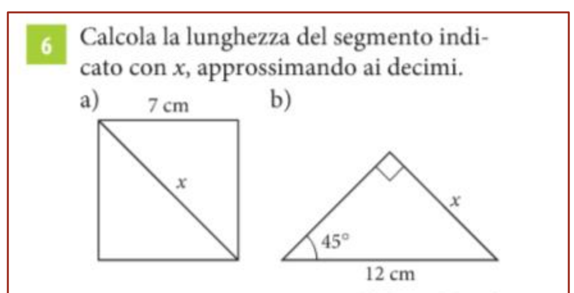
Nelle applicazioni a semplici esercizi, in particolare laddove si debba utilizzare la formula inversa per il calcolo del lato, si riflette sul fatto che se la diagonale è scritta con $\sqrt{2}$, il numero che la precede dà direttamente la lunghezza del lato.



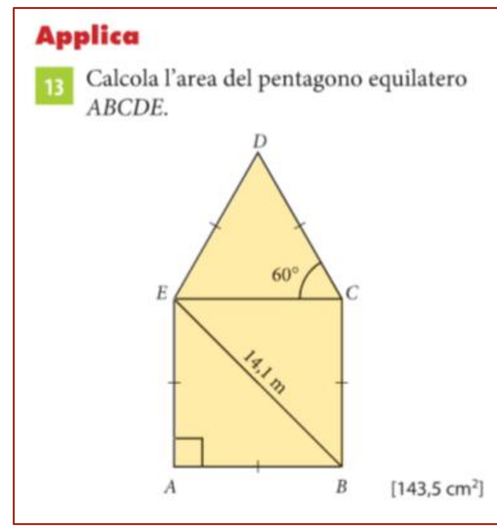




Chiara ha costruito una cuccia per il cane. Prima ha piantato i pali d'angolo. Quale distanza devono avere i pali A e C affinché gli angoli alla base della cuccia siano retti?



Calcola la lunghezza del segmento indicato con x, approssimando ai decimi.



Applica

13 Calcola l'area del pentagono equilatero *ABCDE*.

Verifiche degli apprendimenti

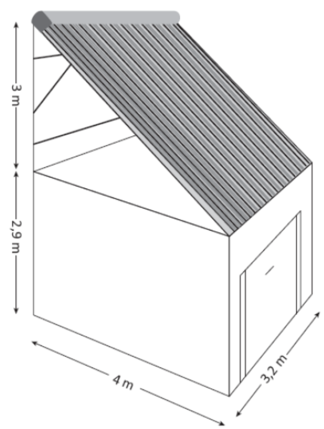
(Verifica intermedia)

Dalla P.N. 2013

D3. Marco vuole installare dei pannelli solari sul tetto del suo box auto.

La superficie su cui poggeranno i pannelli deve essere inclinata per ricevere i raggi del sole nel modo più efficace.

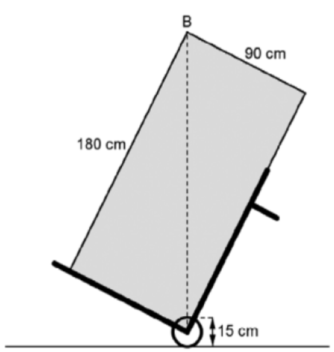
Il progetto di Marco è schematizzato nella figura.



Calcola l'area della superficie che ospiterà i pannelli. Spiega come hai ragionato e/o i calcoli fatti:

Dalla P.N. 2015

D26. Gabriele ha comperato un nuovo frigorifero. Per portarlo in cucina usa un carrello, come rappresentato nella figura.

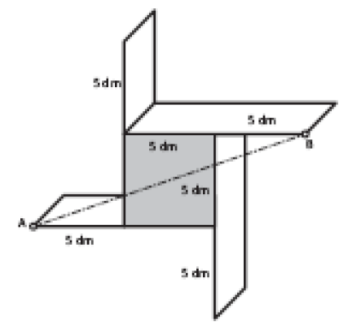


Quale espressione ti permette di calcolare la massima distanza dal suolo del punto B quando il frigorifero è trasportato sul carrello?

Dalla P.N. 2014

D19. Leonardo vuole costruire una mensola come quella in figura. La parte sporgente delle assi della mensola è di lunghezza uguale a quella del lato del quadrato centrale.

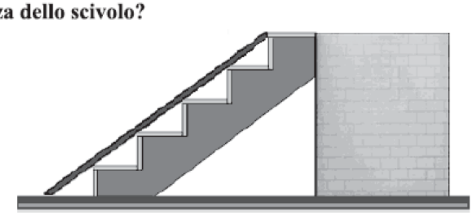
Qui sotto è riportato lo schema della parte posteriore della mensola con le misure. Affinché la mensola sostenga il peso dei libri è necessario mettere una sbarretta d'acciaio che colleghi il punto A con il punto B, come nello schema.



Quanto deve esser lunga la sbarretta? Scrivi i calcoli. ______________________________

Dalla P.N. 2011

D22. Una scala, costituita da 5 gradini profondi 24 cm e alti 18 cm l'uno, deve essere coperta da una tavola di legno utilizzata come scivolo per il trasporto di alcune merci. Qual è il procedimento corretto per trovare la lunghezza dello scivolo?



Scrivi i calcoli. ______________________________

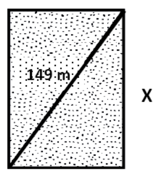
Nome e cognome .... Classe .... Data...................

1. Scrivi l'enunciato del Teorema di Pitagora, poi scrivi le formule per calcolare la lunghezza dei cateti e dell'ipotenusa.

2. Risolvi i seguenti problemi:

2.1 In un triangolo rettangolo le misure dei due cateti sono 65 cm e 72 cm. Calcola il perimetro e l'area.

2.2 Il parco è attraversato in diagonale da un sentiero lungo 149 m. Calcola la lunghezza del lato incognito del parco.

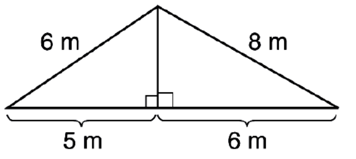


2.3 E' possibile costruire un triangolo con tre segmenti di 10 cm, 12 cm e 15 cm?

In caso affermativo, il triangolo è rettangolo?

Motiva le tue risposte con ragionamenti e calcoli.

2.4 È possibile sistemare due cavetti d'acciaio di sei e di otto metri nel modo indicato in questa figura? Motiva la risposta.



3. In un piano cartesiano riporta i punti di coordinate:

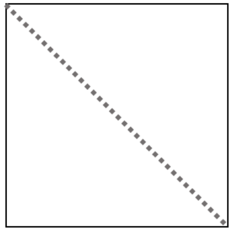
A(0; 1) B(7; 1) C(5; 5)

Indica quali potrebbero essere le coordinate di un quarto punto D, affinché il quadrilatero ABCD risulti essere un trapezio isoscele.

Calcola l'area e il perimetro di tale trapezio.

4. Un giardino di forma quadrata copre una superficie di 625 m^2.

Quanto sarà lungo un sentiero che lo attraversa in diagonale?



Tipologia di verifiche

Come verifica intermedia viene proposta una selezione di quesiti delle prove Invalsi risolvibili mediante il teorema di Pitagora. Tutti prevedono di ragionare su una situazione concreta, rappresentata da un disegno; alla soluzione si arriva dopo aver ragionato bene e mai in modo diretto.
Rispetto ai quesiti originali è stata tolta la possibilità di scegliere la risposta tra quattro proposte, e si richiede di giustificare sempre il risultato con calcoli espliciti e/o ragionamenti.

Alla fine del percorso, poi, viene somministrata una verifica che prevede l'applicazione del teorema in tutti i contesti e le situazioni affrontate. Alcuni problemi sono molto semplici, in modo da consentire ai ragazzi meno brillanti di risolvere almeno una parte del compito. Si chiede di rappresentare i quesiti con disegni chiari e di scrivere correttamente i dati e le richieste. Agli alunni con DSA o con grosse difficoltà logiche l'insegnante ha fornito le figure con i dati e le richieste già scritti.

Risultati ottenuti

La verifica ha avuto un esito positivo. I tre alunni che hanno riportato un'insufficienza lieve (5) hanno mostrato un atteggiamento di rifiuto nei confronti dello studio durante tutto l'anno scolastico; gli stessi ragazzi hanno partecipato attivamente alle lezioni in classe ma non hanno consolidato con un adeguato lavoro a casa.

Valutazione dell’efficacia del percorso didattico sperimentato

Il percorso sul teorema di Pitagora è risultato molto efficace, sia sul piano degli apprendimenti, sia sul piano del coinvolgimento e della motivazione.

Procedere per domande, anche attraverso spunti storici, seguite da discussioni collettive moderate dall’insegnante, ha consentito di arrivare per gradi all’enunciato generale, con la partecipazione attiva di tutta la classe.

La verifica delle relazioni matematiche attraverso attività laboratoriali e costruzioni grafiche ha dato la possibilità, anche agli alunni più deboli sotto il profilo logico, di costruire individualmente gli apprendimenti, che risultano, così, più significativi e duraturi.

L’applicazione del teorema di Pitagora e del teorema inverso a contesti reali ha rinforzato l’idea che la matematica non sia una scienza astratta, ma fornisca strumenti utili per risolvere problemi concreti.